МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник для 9 класса

2-е издание, переработанное и дополненное

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova
nr. 528 din 02 iunie 2016.
Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi apare cu sprijinul financiar al Fondului Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul ....
Manualul nr. ....

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu vor face nici un fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Comisia de evaluare:
Aliona Laşcu, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu”, Chişinău
Mariana Morari, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău
Carolina Parfene, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Ginta Latină”, Chişinău

Traducere din limba română: *Ion Achiri*, *Antonina Erhan*
Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Lidia Paşa*
Coperta: *Sergiu Stanciu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro, www.edituraprut.md

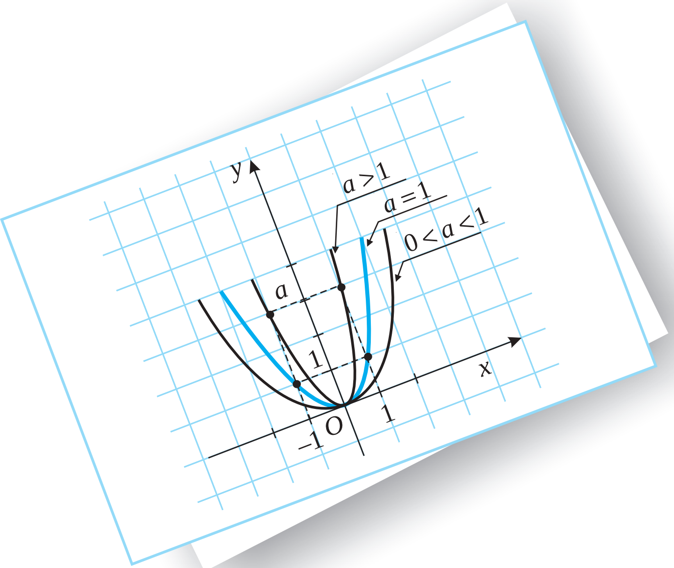
Difuzare: Societatea de Distribuție a Cărții *PRO NOI*, str. Alba Iulia nr. 75, bl. Q, Chişinău, MD 2071
Tel.: (+373 22) 51 68 17, (+373 22) 58 93 08; www.pronoi.md; e-mail: info@pronoi.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 8721 (2016)

CZU 51(075.3)
A 39

ISBN 978-9975-54-266-1

АЛГЕБРА



$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$$

Глава

1 Повторение и дополнение

§ 1. Множество действительных чисел

1.1. Понятие действительного числа

• Исследуйте схему и впишите в рамки элемент или подмножество множества $A=\{-5;\ -21;\ -\sqrt{3};\ 0;\ 2;\ 3\frac{1}{4};\ \sqrt{7};\ 5{,}8;\ 9\}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{\mathbb{N}} \arrow[r, "\text{+ результаты всех вычитаний}"] \arrow[d, "\text{+ результаты всех делений}"] & \boxed{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\text{+ результаты всех делений}"] & \boxed{\mathbb{I}} \arrow[d, "\text{+ все рациональные числа}"] \\
\boxed{\mathbb{Q}_+} \arrow[r, "\text{+ результаты всех вычитаний}"'] & \boxed{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\text{+ радикалы и все остальные числа}"'] & \boxed{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

	$\in \mathbb{Z}$		$\subset \mathbb{Z}$
	$\in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$		$\subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
	$\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$		$\subset \mathbb{Q}$
	$\in \mathbb{Q}_+$		$\subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Образец: $\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\{2;\ 9\}\subset\mathbb{N}$

Обозначения:

$\mathbb{N}=\{0, 1, 3, 4, \ldots\}$ – множество натуральных чисел.

$\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – множество ненулевых натуральных чисел.

$\mathbb{Z}=\{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – множество целых чисел.

$\mathbb{Q}=\{x \mid x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ – множество рациональных чисел.

$\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x \mid x$ – непериодическое десятичное число с бесконечным числом десятичных знаков$\}$ – множество иррациональных чисел.

$\mathbb{R}=\{x \mid x$ – рациональное число или иррациональное число$\}$ – множество действительных чисел.

Справедливы соотношения: $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{I}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$.

$\mathbb{R}^*$ – множество ненулевых действительных чисел;

$\mathbb{R}^*_+$ – множество положительных действительных чисел;

$\mathbb{R}^*_-$ – множество отрицательных действительных чисел.

• Обратите дробь $\frac{33}{18}$ в десятичное число.

Решение:

Применив алгоритм деления, получим: $\frac{33}{18}=1{,}8(3)$.

$1{,}8(3)$ является смешанным периодическим десятичным числом.

Определения

♦ **Простыми периодическими десятичными числами** называются периодические десятичные числа, период которых следует непосредственно после запятой.

♦ **Смешанными периодическими десятичными числами** называются периодические десятичные числа, период которых не следует непосредственно после запятой.

ПРИМЕНИМ

• Обратите в дробь десятичное число:

а) $0,(26)$; б) $25{,}2(43)$.

Решение:

а) Пусть $x=0,(26)$.

Тогда $100x=26,(26)=26+x \Leftrightarrow 100x-x=26 \Leftrightarrow x=\frac{26}{99}$.

Ответ: $0,(26)=\frac{26}{99}$.

В общем виде имеем $0,(\overline{a_1a_2...a_n})=\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n\text{ цифр}}}$, где $a_1, a_2, ..., a_n$ – цифры.

б) ***I метод***. Пусть $x=25{,}2(43)$.

Тогда $10x=252,(43)=252+0,(43)=252+\frac{43}{99}=\frac{24\,991}{99} \Leftrightarrow x=\frac{24\,991}{990}=25\frac{241}{990}$.

II метод. $25{,}2(43)=25+\frac{243-2}{990}=25\frac{241}{990}$.

Ответ: $25{,}2(43)=25\frac{241}{990}$.

В общем виде имеем $0,\overline{a_1a_2...a_n(b_1b_2...b_m)}=\frac{\overline{a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m}-\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{m\text{ цифр}}\underbrace{00...0}_{n\text{ цифр}}}$.

Действительное число может быть записано в виде:

а) десятичного числа с конечным числом десятичных знаков;

б) непериодического десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков;

в) периодического десятичного числа с периодом, отличным от 9.

1.2. Изображение действительных чисел на числовой оси

• Изобразите на числовой оси число $\sqrt{2}$:

а) используя его десятичные приближения;

б) геометрически (при помощи циркуля и линейки).

Решение:

а) Так как $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, следует, что $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Получим следующее приближенное изображение числа $\sqrt{2}$ на числовой оси (рис. 1):

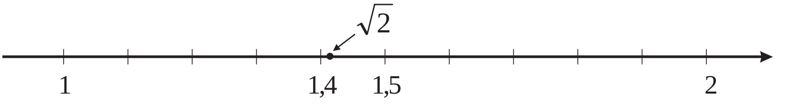


Рис. 1

б) Строим на числовой оси квадрат $OABC$ со стороной $AB = 1$ (рис. 2).

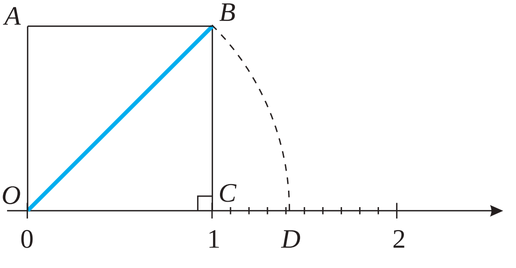


Рис. 2

Применив теорему Пифагора к треугольнику OCB ($m(\angle C) = 90°$), получим $OB = \sqrt{2}$. Циркулем откладываем на числовой оси отрезок OD такой, что $OD = OB = \sqrt{2}$. Тогда точка D имеет координату $\sqrt{2}$.

Как правило, иррациональные числа изображают на числовой оси, используя их десятичные приближения.

Каждому действительному числу a соответствует на числовой оси одна точка A, и наоборот, каждой точке числовой оси соответствует одно действительное число a. Поэтому о точках числовой оси говорят как о действительных числах, и наоборот.

Число a называют ***координатой*** точки A.

Точку A с координатой a обозначают: $A(a)$.

Используя изображение действительных чисел на числовой оси, можно решить различные задачи. Одной из них является задача на сравнение действительных чисел. (Другой способ сравнения действительных чисел рассмотрен в пункте 2.2.)

Например, если действительные числа a и b являются координатами точек A и B соответственно и $\overrightarrow{AB}$ имеет то же направление, что и ось, то $a < b$ (рис. 3).

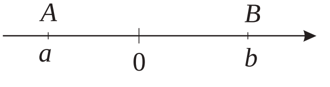


Рис. 3

Из двух действительных чисел, изображенных на числовой оси, бóльшим является число, расположенное правее другого.

ПРИМЕНИМ

• Сравните числа: а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

Решение:

а) Так как $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, а $1{,}4 < 1{,}7$, получим $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

б) Поскольку $\sqrt{2} > 0$, а $-\sqrt{2} < 0$, получим $\sqrt{2} > -\sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2} < \sqrt{2}$.

Замечание. Числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ являются противоположными действительными числами, то есть точки $D(\sqrt{2})$ и $D'(-\sqrt{2})$, расположенные на числовой оси, симметричны относительно ее начала и, наоборот, координаты точек $D(\sqrt{2})$ и $D'(-\sqrt{2})$, симметричных относительно начала оси, являются противоположными действительными числами (рис. 4).

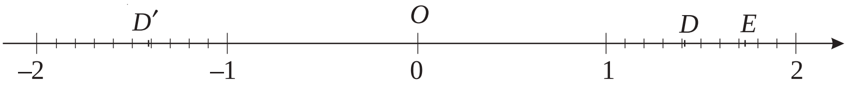


Рис. 4

Противоположными действительными числами называются действительные числа, расположенные на числовой оси по обе стороны от ее начала и на одинаковом расстоянии от него.
Действительные числа a и $-a$ являются противоположными.

1.3. Модуль действительного числа

• Раскройте модуль:

а) $|3-\sqrt{2}|$; б) $|1-\sqrt{3}|$; в) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 3\}$; г) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > \dfrac{1}{3}\right\}$.

Решение:

а) $|3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$, так как $3 > \sqrt{2}$;

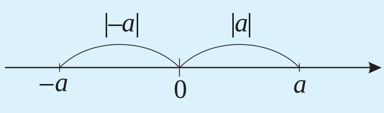
б) $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$, поскольку $1 < \sqrt{3}$;

в) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3, 3]\}$;

г) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > \dfrac{1}{3}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)\right\}$.

Модулем действительного числа a называют такое число $|a|$, что:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \quad |a| = \max\{-a, a\};$$



$|a|$ – расстояние от a до 0 на оси.

Свойства модуля действительного числа

1° $|a| \geq 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$, и $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

2° $|a| \geq a$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

3° $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

4° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ для любых $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

5° $|a|^2 = |a^2| = |-a|^2 = a^2$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

ПРИМЕНИМ

• Раскройте модуль, используя его свойства, и упростите полученное выражение:

а) $|3-\sqrt{2}| \cdot |3+\sqrt{2}|$;

б) $|1-\sqrt{7}| \cdot (1+\sqrt{7})$;

в) $|x+y| : (x+y)^2$.

Решение:

а) $|3-\sqrt{2}| \cdot |3+\sqrt{2}| = |(3-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})| = |9-2| = 7$;

б) $|1-\sqrt{7}| \cdot (1+\sqrt{7}) = -(1-\sqrt{7}) \cdot (1+\sqrt{7}) = -(1-7) = 6$;

в) $|x+y| : (x+y)^2 = |x+y| \cdot \dfrac{1}{|x+y|^2} = \dfrac{1}{|x+y|}$.

Упражнения и задачи

Закрепляем знания

1. Даны множества:

1) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; 2) $\mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$; 3) $\mathbb{Q}_- \setminus \mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$;
5) $\mathbb{R}^*_- \setminus \mathbb{Q}$; 6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$; 7) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$.

Найдите элементы множества $\{-1{,}4;\ \sqrt{5};\ 7{,}(2);\ -21\frac{1}{4};\ 0{,}18;\ 2010;\ \sqrt{21}\}$, которые принадлежат каждому из множеств 1) – 7).

2. Даны числа $12;\ \sqrt{16};\ 3{,}(7);\ -38\frac{1}{2};\ 2011;\ -\sqrt{13};\ 0;\ 6\sqrt{5};\ \pi$.

Определите, какие из них являются рациональными, а какие – иррациональными.

3. 1) Обратите в десятичное число дробь:

а) $\dfrac{7}{8}$; б) $\dfrac{51}{15}$; в) $\dfrac{131}{27}$; г) $\dfrac{210}{198}$.

2) Найдите период каждого из полученных десятичных чисел.

4. Даны числа:

а) 0,(3); б) 2,1(6); в) 5,(738);
г) 17,0(18); д) 83,(685); е) 70,13(18).

Какие из заданных чисел являются простыми периодическими десятичными числами, а какие – смешанные периодические десятичные числа?

5. Изобразите на числовой оси точки: $A(-7)$, $B\left(\frac{1}{2}\right)$, $C(-1{,}25)$, $D\left(3\frac{1}{4}\right)$, $E(7)$.

6. Впишите в каждую рамку одно из чисел множества $\left\{\frac{1}{4};\ 0{,}75;\ 0{,}(3);\ 5{,}5\right\}$, чтобы получить истинное высказывание:

$$\frac{3}{4}=\square;\quad \frac{1}{3}=\square;\quad 0{,}25=\square;\quad 5\frac{1}{2}=\square.$$

7. Дедушка говорит внукам: „У меня есть 130 орехов. Разделите их на две части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, была бы равна большей части, уменьшенной в 3 раза“. Как это сделать?

Формируем способности и применяем

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение и определите, какими числами (рациональными или иррациональными) являются его решения:

а) $3\sqrt{2}x+7=0$; б) $16x-3(x+1)=5x$;
в) $2{,}5(x-4)-6x=3-x$; г) $x^2-3x-10=0$;
д) $2x^2+7x-8=0$; е) $-x^2+10x+2=0$.

9. Обратите в дробь десятичное число:

а) 0,(18); б) 3,(2); в) 6,1(8); г) 5,12(18); д) 25,1(378).

10. Используя числовую ось, впишите в рамки один из знаков „<“, „>“, „=“:

а) $1+\sqrt{7}\ \square\ 2\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{36}\ \square\ -6{,}123...$;
в) $3{,}78\ \square\ \sqrt{11}$; г) $-\frac{1}{3}\ \square\ -0{,}(33)$.

11. Раскройте модуль:

а) $|1-\sqrt{7}|$; б) $|-\sqrt{3}-\sqrt{2}|$; в) $|8-\sqrt{49}|$; г) $|(3-\sqrt{2})^2|$.

12. Раскройте модуль:

а) $\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 7\}$; б) $\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 0\}$;
в) $\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>0\}$; г) $\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\ge\sqrt{5}\}$.

13. Изобразите на числовой оси множества, полученные в задании **12** после раскрытия модуля.

14. Имеются два сосуда емкостью 5 л и 7 л. Как получить 4 л воды, используя лишь эти два сосуда?

15. Полученный при сушке винограда изюм составляет 32% от его исходной массы. Сколько винограда нужно взять, чтобы получить 8 кг изюма?

Развиваем способности и творим

16. Является ли рациональным число:

а) $\sqrt{8}$; б) 7,2(15); в) $1-\sqrt{5}$; г) $\sqrt{225}$; д) $\sqrt{13}$?

17. Используя циркуль и линейку, постройте на числовой оси точку, координатой которой является иррациональное число:

а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{17}$; в) $-\sqrt{17}$; г) $-\sqrt{11}$.

18. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|3x-7|=8$; б) $|2x^2+17x+658|=-2\sqrt{19}$;
в) $|x|\cdot|x-3|=4$; г) $|2x(x-0,5)|=3$.

19. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|3x-1|=|1-x|$; б) $|2+x|=|5x-3|$;
в) $2|x|=|x-3|+2$; г) $|2x-1|=|x+5|-2$.

§ 2. Действия над действительными числами

2.1. Свойства действий над действительными числами

• Вычислите сумму $2\sqrt{11}+\sqrt{7}$:

1) с точностью до 0,2;
2) с точностью до 0,02;
3) с точностью до 0,002.

Решение:

Имеем: $\sqrt{11}=3,316...$, $\sqrt{7}=2,645...$ Тогда $2\sqrt{11}=6,633...$

Используя десятичные приближения для иррационального числа с недостатком и избытком, получим:

1) $6,6<2\sqrt{11}<6,7$ и $2,6<\sqrt{7}<2,7$. Тогда $6,6+2,6<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<6,7+2,7$.

Значит, $9,2<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<9,4$;

2) $6,63<2\sqrt{11}<6,64$ и $2,64<\sqrt{7}<2,65$.

Следовательно, $9,27<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<9,29$;

3) $6,633<2\sqrt{11}<6,634$ и $2,645<\sqrt{7}<2,646$.

Значит, $9,278<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<9,280$.

Замечание. В зависимости от требуемой точности, используя изложенный прием, можно вычислить сумму $2\sqrt{11}+\sqrt{7}$ с заданной точностью: 0,2; 0,02; 0,002 и т. д.

Например, $2\sqrt{11}+\sqrt{7}\approx 9,27$ (с недостатком) и $2\sqrt{11}+\sqrt{7}\approx 9,29$ (с избытком) с точностью до 0,02.

Свойства сложения и умножения действительных чисел

1° ***Ассоциативность***: $a+(b+c)=(a+b)+c$ для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.
2° ***Коммутативность***: $a+b=b+a$ для любых $a, b\in\mathbb{R}$.	$a\cdot b=b\cdot a$ для любых $a, b\in\mathbb{R}$.
3° 0 ***является нейтральным элементом при сложении***: $a+0=0+a=0$ для любого $a\in\mathbb{R}$.	1 ***является нейтральным элементом при умножении***: $1\cdot a=a\cdot 1=a$ для любого $a\in\mathbb{R}$.
4° Для любого действительного числа a существует ***противоположное*** ему число $-a$ такое, что $a+(-a)=0$.	Для любого ненулевого действительного числа a существует ***обратное*** ему число $\frac{1}{a}$ такое, что $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$.
5° —	$a\cdot 0=0\cdot a=0$ для любого $a\in\mathbb{R}$.

6° ***Дистрибутивность умножения относительно сложения*** (***вычитания***):

$$a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c \text{ для любых } a, b, c\in\mathbb{R}.$$

Замечания. **1.** $a-b=a+(-b)$ для любых $a, b\in\mathbb{R}$.

2. $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$ для любых $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

Порядок выполнения действий и использование скобок на множестве $\mathbb{R}$

I. В выражении без скобок, содержащем различные действия, вначале выполняем, в порядке их записи, действия извлечения квадратного корня и возведения в степень, затем действия умножения и деления в порядке их записи, и, наконец, действия сложения и вычитания в порядке их записи.

II. В выражении со скобками вначале выполняем действия в скобках, соблюдая при этом общепринятый порядок выполнения действий.

2.2. Сравнение действительных чисел

• Сравните числа: а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; б) $\sqrt{2}$ и 1,3; в) $4-\sqrt{5}$ и -3.

Решение:

а) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ → так как $\frac{2}{3}=0,(6)$, $\frac{3}{4}=0,75$ и $0,(6)<0,75$;

б) $\sqrt{2}>1,3$ → поскольку $\sqrt{2}\approx 1,4$ и $1,4>1,3$;

в) $4-\sqrt{5}>-3$ → так как $\sqrt{5}\approx 2,2$; значит, $4-\sqrt{5}>0$, а $-3<0$.

Внимание! Любые два действительных числа можно сравнивать, то есть для любых $a, b\in\mathbb{R}$ справедливо $a<b$ или $a=b$.
При $a=b$ или $a<b$ $(a>b)$ записывают $a\le b$ $(a\ge b)$.

ПРИМЕНИМ

• Запишите в порядке возрастания числа $\sqrt{7},\ 5,\ 2\sqrt{2},\ -3$.

Решение:

Имеем $\sqrt{7}\approx 2{,}6,\ 2\sqrt{2}\approx 2{,}8$. Значит, $2\sqrt{2}>\sqrt{7}$. Так как $-3<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<5$, получим искомое упорядочивание: $-3,\ \sqrt{7},\ 2\sqrt{2},\ 5$.

Связь между отношением порядка „ $\le$ “ и действиями сложения и умножения на множестве $\mathbb{R}$ выражается следующими ***свойствами***:

1° Если $a\le b$ и $c\in\mathbb{R}$, то $a+c\le b+c$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

2° Если $a\le b$ и $c\le d$, то $a+c\le b+d$ для любых $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

3° Если $a\le b$ и $c>0$, то $ac\le bc$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

4° Если $a\le b$ и $c<0$, то $ac\ge bc$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

5° Если $a\le b, c\le d$ и $a, b, c, d\in\mathbb{R}_+^*$, то $ac\le bd$ и $\dfrac{a}{d}\le\dfrac{b}{c}$.

Замечание. Аналогичные свойства можно получить, если заменить знак „ $\le$ “ на любой из знаков „ $<$ “, „ $\ge$ “, „ $>$ “.

Действительные числа можно сравнивать, используя их десятичные приближения или их изображения на числовой оси.

Упражнения и задачи

Закрепляем знания

1. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{2}(2+\sqrt{2})-5(3{,}5-\sqrt{6})+11:(7-1{,}5)$; б) $\dfrac{2}{5}\cdot 0{,}25+78:4-8\sqrt{5}:\sqrt{5}-3\cdot 7\sqrt{2}$.

2. Вычислите с точностью до 0,001: а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{2}$; г) $3\sqrt{5}$.

3. Сравните числа:

а) $\dfrac{5}{7}$ и $\dfrac{3}{4}$; б) $\sqrt{7}$ и $2{,}65$; в) $3-\sqrt{2}$ и $1{,}7$; г) $1+\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{2}$.

4. Запишите в порядке возрастания числа: $3\sqrt{2};\ -3,(56);\ 2\sqrt{3};\ 1+\sqrt{2};\ 2,(15);\ -2\dfrac{1}{5};\ 2-\sqrt{5}$.

5. Сырые овощи (100 г) содержат 27 мг аскорбиновой кислоты (витамин С). Те же овощи, в вареном виде, содержат лишь 18 мг аскорбиновой кислоты. Вычислите, в процентах, каковы потери витамина С при варке овощей.

6. Для изготовления шоколадного торта на 6 порций используются следующие ингредиенты: 250 г сливочного масла, 200 г сахара, 300 г шоколада, 6 яиц и 3 ложки муки. Какое количество каждого ингредиента нужно, чтобы получился торт на 4 порции?

7. На флаконе с микстурой написано: 40 ± 3 мл. Что можно сказать о количестве лекарства во флаконе?

8. Запишите в виде суммы, разности, произведения и частного двух действительных чисел, отличных от 0 и 1, числовое выражение:

а) $3\sqrt{7}$; б) $8+\sqrt{5}$; в) $-2\sqrt{3}$; г) $-7{,}5$; д) 18; е) $\sqrt{6}-\sqrt{11}$.

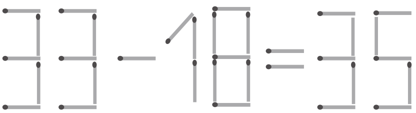
Формируем способности и применяем

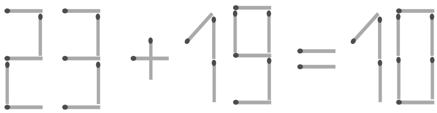
9. Сколько раз следует прибавить наибольшее двузначное число к наибольшему однозначному числу, чтобы получить наибольшее трехзначное число?

10. Сумма, произведение и частное каких действительных чисел равны между собой?

11. Дополните числовую последовательность: 12; 18; 27; 40,5; ☐; ☐.

12. Поменяйте расположение одной спички, чтобы полученное высказывание было истинным:

а) 

б) 

13. Выполните действия: а) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$; б) $(2\sqrt{7}+1)^2$; в) $(3-\sqrt{7})^2$; г) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})^2$.

14. Выполните действия: а) $(2-\sqrt{3})^3$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$; в) $(3\sqrt{5}+1)^3$; г) $(2+\sqrt{3})^3$.

15. Выполните с точностью до 0,002:

а) $3\sqrt{7}+2\sqrt{5}$; б) $7\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; в) $-3\sqrt{2}-5$; г) $3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

16. Найдите закономерность и впишите пропущенное числовое выражение:

$\sqrt{3}-2\sqrt{2}$	2	$11-4\sqrt{6}$
$1+\sqrt{5}$	3	?

17. Цена телевизора повысилась на 20%, а затем, через месяц, еще на 20%. На сколько процентов возросла изначальная цена телевизора?

18. При списывании упражнения $20:5\cdot 2+6^2$ ученик забыл поставить скобки. Восстановите скобки, если известно, что результатом упражнения должно быть число:

а) 38; б) 196; в) 152.

Развиваем способности и творим

19. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(2-3\sqrt{3})^2}+2|3-\sqrt{13}|-7{,}5(4-\sqrt{8})^2+6{,}4:(5-1{,}8)$;

б) $|7-2\sqrt{3}|+|1-3\sqrt{3}|^2-6(\sqrt{3}+8)-\sqrt{(2-7\sqrt{3})^2}$.

20. Выполните действия: а) $(a-b+c)^2$; б) $(a-b-c)^2$; в) $(a+b+c)^2$.

21. Вычислите: а) $7,(15)+2,(18)-5,(23)+11,(20)$; б) $-5{,}2(7)+6{,}1(3)-3{,}5(3)+2{,}2(2)$.

22. Запишите число 34 000 в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

§ 3. Степени и корни

3.1. Квадратный корень из неотрицательного действительного числа и его свойства. Повторение и дополнение

• Вычислите: а) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Решение:

а) $\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ → так как $\frac{5}{2}\geq 0$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$;

б) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}=$

$=|\sqrt{7}-3|=3-\sqrt{7}$ → поскольку $(3-\sqrt{7})\geq 0$ и $(3-\sqrt{7})^2=16-6\sqrt{7}$.

Определение

Квадратным корнем, или **корнем второй степени из неотрицательного действительного числа** a называется неотрицательное действительное число b, квадрат которого равен a.

Квадратный корень из неотрицательного действительного числа a обозначается $\sqrt{a}$.

Свойства квадратного корня

1° Если a – действительное число, то $\sqrt{a^2}=|a|$.

2° Если a и b – неотрицательные действительные числа, то $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

3° Если a – неотрицательное действительное число, а b – положительное действительное число, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

4° Если a – действительное число, а b – неотрицательное число, то $\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}$.

ПРИМЕНИМ

• Вычислите $\frac{\sqrt{3{,}6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}$.

Решение:

$\frac{\sqrt{3{,}6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{3{,}6}{3}}\cdot\sqrt{\frac{48}{10}}=$ → применяем свойство 3°

$=\sqrt{\frac{3{,}6\cdot 48}{10\cdot 3}}=\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{16}=$ → применяем свойство 2°

$=0{,}6\cdot 4=2{,}4.$

• Упростите выражение $\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}$, если $a<0,\ b>0$.

Решение:

$$\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}=\frac{3b^2}{5a}\cdot\frac{\sqrt{50a^2}}{\sqrt{81b^2}}=$$ → применяем свойство

$$=\frac{3b^2\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{a^2}}{5a\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{b^2}}=$$ → применяем свойство

$$=\frac{3b^2\cdot5\sqrt{2}\cdot|a|}{5a\cdot9\cdot|b|}=$$ → применяем свойство

$$=\frac{b^2\cdot(-a)\cdot\sqrt{2}}{a\cdot3b}=-\frac{b\sqrt{2}}{3}$$ → поскольку $a<0,\ b>0$.

ИССЛЕДУЕМ

• Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения: а) $\frac{14}{3\sqrt{7}}$; б) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}$.

Решение:

а) $\frac{14}{3\sqrt{7}}=\frac{14\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=$ → умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{7}$

$=\frac{14\sqrt{7}}{3\cdot7}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$;

б) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})}=$ → умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю: $4+\sqrt{10}$

$=\frac{3(4+\sqrt{10})}{16-10}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{6}=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$.

Определение

Выражения $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$, $a, b\in\mathbb{R}$, $b>0$, называются **сопряженными**.

Избавлением от иррациональности в знаменателе отношения называется преобразование, приводящее знаменатель этого отношения к рациональному виду.

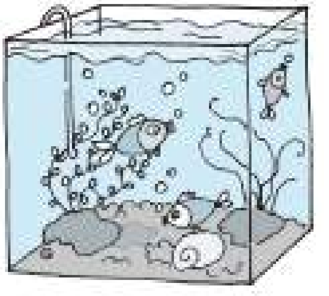
ОБОБЩИМ

• Пусть E – некоторое выражение. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, нужно умножить числитель и знаменатель отношения вида:

1. $\frac{E}{a\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}^*_+$, на $\sqrt{b}$;

2. $\frac{E}{a\pm\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*_+$, на выражение, сопряженное знаменателю заданного отношения.

3.2. Понятие корня третьей степени (дополнительно)



• В подарок Сергею папа заказал аквариум в форме куба емкостью $64\,000$ см^3. Он предложил сыну определить размеры аквариума, чтобы подыскать подходящее место в квартире. Как Сергею выполнить задание?

Решение:

Пусть b – длина ребра этого куба, тогда его объем равен $V = b^3$. В соответствии с условиями задачи нужно найти такое число b, для которого $b^3 = 64\,000$.
Получаем $b = 40$, так как $40^3 = 64\,000$.

Ответ: Размеры аквариума должны быть 40 см, 40 см, 40 см.

При решении задачи мы нашли число $b = 40$, для которого $b^3 = 64\,000$. Такое число называют кубическим корнем или корнем (радикалом) третьей степени из числа $64\,000$ и записывают $\sqrt[3]{64\,000} = 40$.

Определение

Корнем (радикалом) третьей степени из действительного числа a называется такое действительное число b, что $b^3 = a$.

Корень (радикал) третьей степени из числа a обозначается $\sqrt[3]{a}$.

ПРИМЕНИМ

Вычислите: а) $\sqrt[3]{125}$; б) $\sqrt[3]{-8}$; в) $\sqrt[3]{0{,}027}$; г) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{125} = 5$ → так как $5^3 = 125$;

б) $\sqrt[3]{-8} = -2$ → поскольку $(-2)^3 = -8$;

в) $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ → так как ;

г) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ → поскольку .

3.3. Степень с целым показателем. Повторение и дополнение

• Вычислите: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; б) $(1{,}2)^0$; в) 5^{-3}.

Решение:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$; → $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$

б) $(1{,}2)^0 = 1$; → $a^0 = 1,\ a \in \mathbb{R}^*$

в) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$. → $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{Z}^*$

Определение степени с целым показателем

Для $a \in \mathbb{R}^*$ и $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}^*$. $a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Для $a = 0$ и $n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

Замечание. Выражение 0^0 не имеет смысла.

Свойства степени с целым показателем

Для $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{Z}$:

1° $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$; 2° $\dfrac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$; 3° $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;

4° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; 5° $(a^k)^m = a^{k\cdot m}$.

ПРИМЕНИМ

• Вычислите $\dfrac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4}$.

Решение:

$$\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4} = 3^{-3+2-4} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$

• Упростите выражение $\left(\dfrac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2a^2}{5b^3}\right)^3$.

Решение:

$$\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3 = \frac{2^{-2} \cdot a^{-4}}{5^{-2} \cdot b^{-10}} \cdot \frac{2^3 \cdot a^6}{5^3 \cdot b^9} = \frac{2^{-2+3} \cdot a^{-4+6}}{5^{-2+3} \cdot b^{-10+9}} = \frac{2a^2}{5b^{-1}} = \frac{2a^2 b}{5}.$$

Задание. Сформулируйте свойства 1°–5° словами.

Упражнения и задачи

Закрепляем знания

1. Вычислите:

а) $\sqrt{10 \cdot 40}$; б) $\sqrt{\dfrac{2}{32}}$; в) $\sqrt{0{,}16 \cdot 25 \cdot 1{,}69}$; г) $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$; д) $\sqrt{3^4}$; е) $\sqrt{\dfrac{2^6}{5^4}}$.

2. Найдите значения действительного числа a, при которых верно равенство:

а) $\sqrt{(a-2)^2} = a - 2$; б) $\sqrt{\dfrac{a^2}{4}} = -\dfrac{a}{2}$; в) $\sqrt{\dfrac{3}{a^2 + 2a + 1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{a+1}$.

3. Внесите множитель под знак корня:

а) $\dfrac{2}{3}\sqrt{27}$; б) $a\sqrt{3}$, $a < 0$; в) $(b-1)\sqrt{b}$, $b \geq 1$.

4. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{48}$; б) $\sqrt{98}$; в) $\sqrt{5a^4}$; г) $\sqrt{7(2-a)^2}$, $a<2$.

5. Запишите в виде степени с основанием 10: 1000; 100; 10; 1; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; 0,0001.

6. Вычислите:

а) $\frac{3^{-4}}{3^{-7}}$; б) $5^{-11}\cdot 5^9$; в) $\left(\frac{3}{11}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^{-3}$; г) $6^2\cdot 24^{-2}$.

7. Выполните действия:

а) $2a^{-3}\cdot 5a^5$; б) $\frac{7x^{-3}}{28x^{-4}}$; в) $\left(\frac{1}{2}b^{-3}\right)^{-2}$; г) $\left(\frac{1}{10}y^2\right)^{-3}$.

Формируем способности и применяем

8. Вычислите: а) $10\sqrt{1{,}44}+\sqrt{48}-\sqrt{12}-\frac{6}{\sqrt{3}}-5\sqrt{0{,}16}$; б) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}-\frac{1}{\sqrt{7}+2}$.

9. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения:

а) $\frac{7}{3\sqrt{21}}$; б) $\frac{6}{5\sqrt{10}}$; в) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$; д) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

10. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-2\sqrt{27})$; б) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}(2-5\sqrt{12})$;

в) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$; г) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$.

11. Сократите отношение:

а) $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$; б) $\frac{3+\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+a}$; в) $\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}$; г) $\frac{2\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}}$.

12. Вычислите:

а) $\frac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 32^{-2}}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25}\cdot 25^{-6}\cdot 125^{-4}$; в) $\frac{20^{-4}\cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$;

г) $\frac{(-3)^{-4}\cdot 27^{10}}{81^9\cdot 9^{-6}}$; д) $(10^{-2}-1)(10^{-2}+1)$; е) $\frac{(2^3)^5\cdot(2^{-6})^2}{4^2}$.

13. Вычислите: а) $(2{,}5\cdot 10^{-3})\cdot(8{,}4\cdot 10^4)$; б) $(4{,}5\cdot 10^{-2}):(1{,}5\cdot 10^{-3})$;

в) $(3{,}6\cdot 10^5)\cdot[(2{,}4)^{-1}\cdot 10^{-2}]$; г) $(6{,}4\cdot 10^{-4}):(1{,}6\cdot 10^{-3})$.

14. Масса Солнца приблизительно равна $0{,}2\cdot 10^{31}$ кг. Во сколько раз масса Солнца больше массы Земли, если масса Земли приблизительно равна $0{,}5974\cdot 10^{25}$ кг?

15. Среднее расстояние от Земли до Солнца равно $0{,}1496\cdot 10^9$ км. За сколько времени солнечный луч преодолеет это расстояние, если скорость света равна приблизительно $0{,}3\cdot 10^9$ м/с?

Развиваем способности и творим

16. Вычислите: а) $\sqrt{2{,}5\cdot 10^5}$; б) $\sqrt{4{,}9\cdot 10^{-3}}$; в) $\sqrt{1{,}6\cdot 10^7}$; г) $\sqrt{8{,}1\cdot 10^{-5}}$.

17. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}+\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{2\sqrt{5}+4}-\sqrt{2\sqrt{5}-4}\right)^2$.

18. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}=3$; б) $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; г) $1-2\sqrt{7}=\sqrt{29-4\sqrt{7}}$.

19. Сократите отношение $(n \in \mathbb{N})$:

а) $\dfrac{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{6^n}$; б) $\dfrac{14^n}{2^{n-2} \cdot 7^{n+2}}$; в) $\dfrac{12^n}{3^{n-1} \cdot 2^{2n+1}}$; г) $\dfrac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-1}}{100^n}$.

20. Упростите выражение:

а) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$; б) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$; в) $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

Указание. Примените формулы „сложных“ радикалов:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \quad a, b, (a^2-b) \in \mathbb{R}_+.$$

Упражнения и задачи для повторения

Закрепляем знания

1. Выполните действия:

а) $6{,}5 \cdot (1{,}2-4{,}(3))-9{,}9:3+7{,}4 \cdot 5-450$; б) $(7-\sqrt{2})(5+\sqrt{3})-3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+10(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

2. 1) Обратите в десятичное число дробь: а) $\dfrac{16}{23}$; б) $\dfrac{28}{105}$; в) $\dfrac{65}{302}$; г) $\dfrac{178}{6\,004}$.

2) Найдите период каждого из полученных десятичных чисел.

3. Сравните числа:

а) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{63}$ и $\sqrt{54}$; в) $\sqrt{23}$ и $\sqrt{103}$;

г) $\sqrt{17}$ и $4{,}5$; д) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$; е) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ и $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$.

4. Раскройте модуль:

а) $|7{,}(5)|$; б) $|-3\sqrt{7}|$; в) $|2-3\sqrt{2}|$; г) $|8-\sqrt{66}|$.

5. Запишите в порядке возрастания числа:

а) $7{,}2(3)$; $\sqrt{7}$; $-3\sqrt{5}$; $7{,}1$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{25}$. б) $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{10}$; $5\sqrt{2}$; 7.

6. Используя микрокалькулятор, вычислите с точностью до 0,01:

а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{29}$; г) $\sqrt{37}$.

7. Упростите выражение:

а) $a^8 \cdot (a^{-4})^3$, $a \in \mathbb{R}^*$; б) $(c^{-3} \cdot c^8)^{-2}$, $c \in \mathbb{R}^*$; в) $\left(\dfrac{m^3}{m^{-5}}\right)^{-2} \cdot m^{-4}$, $m \in \mathbb{R}^*$; г) $\left(\dfrac{3x^3}{x^{-2}}\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

8. Из двузначного числа, умноженного на однозначное число, вычитают однозначное число и получают 1. Найдите эти числа.

9. У Алины одна купюра в 50 леев, одна в 10 леев, две по 1 лею и еще 50 банов. После оплаты покупки у нее осталось 20% от первоначальной суммы. Сколько денег истратила Алина?

Формируем способности и применяем

10. Запишите в виде суммы, разности, произведения и частного двух действительных чисел, отличных от 0 и 1, число (выражение):

а) $-2\sqrt{11}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) $1+3\sqrt{7}$; г) $7\sqrt{13}$.

11. Выполните действия:

а) $(3-2\sqrt{5})^2$; б) $(2+\sqrt{7})^2$; в) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$; г) $(5+\sqrt{5})^3$.

12. Вычислите с точностью до 0,1 решения уравнения:
а) $3x^2-x-1=0$; б) $-x^2+5x-1=0$; в) $4x^2-x-2=0$; г) $x^2-3x-8=0$.

13. Раскройте модуль:
а) $|1-3\sqrt{3}|$; б) $|-7+\sqrt{16}|$; в) $|-(3-\sqrt{5})|^2$; г) $|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$.

14. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|x^2-3x+1|=5$; б) $|2x^2-x+2|=2$; в) $|4x^2-7|=9$; г) $|x-2x^2|=3$.

15. Сравните: а) $5-2\sqrt{3}\ \square\ 2+\sqrt{2}$; б) $6+\sqrt{7}\ \square\ 4\sqrt{7}$.

16. Изобразите на числовой оси множество:
а) $A=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\le\sqrt{5}\}$; б) $B=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x+1|<\sqrt{3}\}$; в) $D=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x-3|\ge1{,}5\}$.

17. Обратите в дробь десятичное число:
а) 6,(7); б) 15,(25); в) 3,2(17); г) 0,123(7).

18. Упростите выражение:
а) $\sqrt{16x^2}$, если $x<0$; б) $\sqrt{0{,}81a^2b^2}$, если $a>0$, $b<0$;
в) $\sqrt{24m^3n^2}$, если $n>0$; г) $\sqrt{8x^4y^6}$, если $y<0$.

19. Вычислите:
а) $\dfrac{6{,}6\cdot10^5}{1{,}1\cdot10^{-7}}$; б) $\dfrac{5{,}6\cdot10^{-2}}{7\cdot10^{-3}}$; в) $\dfrac{1{,}9\cdot10^{-5}}{3{,}8\cdot10^{-4}}$.

20. Из квадратного листа жести вырезали полосу шириной 25 см. Найдите исходные размеры листа, если известно, что площадь оставшейся части равна 4 400 см^2.

21. Отец говорит сыну: „Десять лет назад я был в 10 раз старше тебя, а через 22 года я буду в два раза старше тебя“. Сколько сейчас лет отцу и сколько сыну?

22. Найдите вероятность получения числа, кратного 2, при бросании игральной кости.

23. Кирпич весит 1,5 кг и еще половину своей массы. Сколько весит кирпич?

24. Арбуз весит 3,5 кг и еще половину своей массы. Сколько весит арбуз?

Развиваем способности и творим

25. Изобразите геометрически на числовой оси точки:
$A(\sqrt{5}+1)$, $B(2+\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{7}-4)$.

26. Выполните действия: а) $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$; б) $(2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

27. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|x|(|x|-3)=5$; б) $x^2-|x|-2=0$; в) $\sqrt{(3-x)^2}=3-|3-x|^2$;
г) $(|x|-3)(|x|+5)-1=0$; д) $\sqrt{(x+4)^2}=5-|4+x|^2$.

28. Упростите выражение:
а) $(x^{-2}-y^{-2}):(x^{-1}+y^{-1})$, $x,y\in\mathbb{R}^*$; б) $(a+b)^{-2}\cdot(a^{-2}-b^{-2})$, $a,b\in\mathbb{R}^*$.

29. Чему равна:
а) разность $|a|-a$, $a\in\mathbb{R}$; б) сумма $|a|+a$, $a\in\mathbb{R}$?

30. Докажите, что:
а) произведение трех последовательных натуральных чисел кратно 6;
б) произведение двух последовательных четных чисел кратно 8.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Пусть множество
$A=\{-3;\ 0;\ 5,(4);\ |\pi-4|;\ 7;\ \sqrt{4};\ \sqrt{5}\}$.

а) Заполните рамку: $\operatorname{card} A = \square$. **1 б**

б) Найдите: $A\cap\mathbb{N};\ A\cap\mathbb{Z};\ A\cap\mathbb{Q}$. **3 б**

в) Запишите в порядке возрастания элементы множества A. **5 б**

г) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: **8 б**
$[18:(-3)^3-7^{-2}\cdot 5,(4)]\cdot(x-1)=\sqrt{4}+2x$.

2. Дано выражение $E=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2}+2(\sqrt{5}-2)$.

а) Найдите значение выражения E. **8 б**

б) Найдите число, обратное числу, полученному в пункте а). **3 б**

3. У Алисии одна купюра достоинством в 100 леев, две купюры по 50 леев, одна в 20 леев, три по 10 леев и четыре купюры по 1 лею. После оплаты приобретенного товара у Алисии осталось 12% от первоначальной суммы.

а) Впишите в рамку знак „>“ или „<“, чтобы получить истинное высказывание: **1 б**

Начальная сумма $\square$ *210 леев.*

б) Найдите сумму, потраченную Алисией. **5 б**

в) Определите сумму, которую должна была бы потратить Алисия, чтобы у нее осталось 20% от первоначальной суммы. **4 б**

II вариант

1. Пусть множество
$B=\{|3-\pi|;\ -5;\ 0;\ \sqrt{9};\ 8,(3);\ -\pi;\ 6\}$.

а) Заполните рамку: $\operatorname{card} B = \square$.

б) Найдите: $B\cap\mathbb{N};\ B\cap\mathbb{Z};\ B\cap\mathbb{Q}$.

в) Запишите в порядке убывания элементы множества B.

г) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
$[(-5)^2:8,(3)-6^{-2}\cdot 18]\cdot(x+1)=\sqrt{9}-3x$.

2. Дано выражение $E=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}-2(\sqrt{5}-1)$.

а) Найдите значение выражения E.

б) Найдите число, обратное числу, полученному в пункте а).

3. У Амелии одна купюра достоинством в 200 леев, две купюры по 100 леев, одна в 50 леев, четыре по 5 леев и три купюры по 1 лею. После оплаты коммунальных услуг у Амелии осталось 20% от первоначальной суммы.

а) Впишите в рамку знак „>“ или „<“, чтобы получить истинное высказывание:

Начальная сумма $\square$ *620 леев.*

б) Найдите сумму, потраченную Амелией.

в) Определите сумму, которую должна была бы потратить Амелия на оплату коммунальных услуг, чтобы у нее осталось 15% от первоначальной суммы.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	38–37	36–33	32–29	28–23	22–17	16–12	11–8	7–5	4–3	2–0

Глава 2

Функции

§ 1. Понятие функции. Повторение и дополнение

1.1. Понятие функции. Способы задания функции

• Определите элементы функции:

а) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\underbrace{f(x) = -3x + 1}$.

$D(e)$ – область определения функции f

Область значений функции f

Правило (закон) соответствия

$E(f) = \{y \mid y = f(x) = -3x + 1\}$ – множество значений функции f

б) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\underbrace{f(x) = 8{,}5x - 3}$.

$E(g) =$

Определение

Пусть A и B – заданные непустые множества. Говорят, что **функция** определена на множестве A со значениями в множестве B, если задано правило (закон), по которому каждому элементу x из A ставится в соответствие единственный элемент y из B.

Функция, определенная на множестве A со значениями в множестве B, обозначается $f\colon A \to B$ (или $A \xrightarrow{f} B$).

Множество A называется ***областью определения*** функции f и обозначается $D(f)$.

Множество B называется ***областью значений*** функции f.

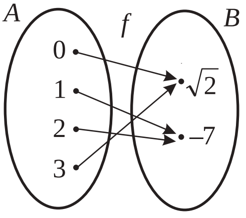
Значение функции f в x обозначается $y = f(x)$; x называется ***независимой переменной***, или ***аргументом*** функции f, а y – ***зависимой переменной***.

Множество значений функции f обозначается $E(f) = \{y \mid y = f(x)\}$.

Очевидно, $E(f) \subseteq B$.

• Выявите способ задания каждой из функций f, g, h, p (рис. 1).

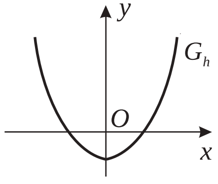
а)



б)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = g(x)$	–6	–4	–2	0	2	4	6

в)



г) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^2 + 2.$

Рис. 1

ОБОБЩИМ

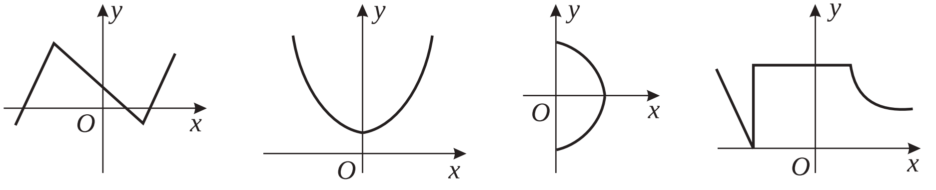
Способы задания функции

I. Аналитический способ: формулами.

II. Синтетический способ: в виде диаграммы, таблицы, графика.

1.2. График функции

• Исследуйте фигуры из рисунка 2 и определите, какие из них являются графиками функций. Обоснуйте!



а) б) в) г)

Рис. 2

Определение

Графиком функции $f: A \to B$ называют множество $G_f = \{(x, y) \mid x \in A$ и $y = f(x)\}$, или изображение этого множества в заданной прямоугольной системе координат.

Итак, график функции f – это подмножество декартова произведения $A \times B$ или изображение этого множества в заданной прямоугольной системе координат.

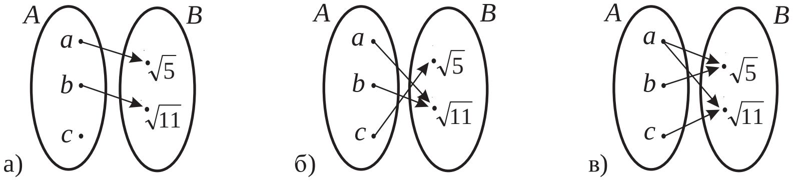
Уравнение $y = f(x)$, решениями которого являются все элементы $(x, y) \in G_f$, называется ***уравнением графика*** функции f.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Прочтите: а) $f\colon \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$; б) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; в) $h\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$; г) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

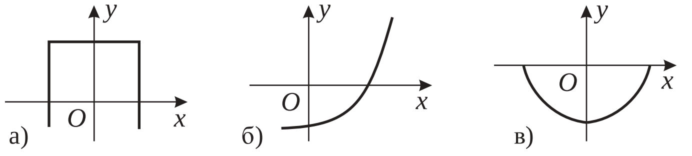
2. Определите, какая из диаграмм задает функцию.



3. Определите элементы функции:

а) $f\colon \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\} \to \{-3,\ -2,\ 0,\ 1\}$, $f(x) = -x$; б) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 12$.

4. Определите, на каком из рисунков кривая не является графиком функции.



Формируем способности и применяем

5. Даны множества $A = \{-\sqrt{5}, -3, 0, 2\}$ и $B = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

а) Задайте диаграммами все функции, определенные на множестве A со значениями в множестве B.

б) Постройте графики функций, полученных в пункте а), составив при этом соответствующие таблицы значений.

6. Верно ли задана функция:

а) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x^2 - 1$; б) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\dfrac{5}{x}$;

в) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 4$; г) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$?

7. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \le -1, \\ 5 - 3x, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

Вычислите $f(-\sqrt{2})$, $f(-0{,}1)$, $f(0)$, $f(2\sqrt{5})$.

8. Задайте формулой функцию:

$f\colon \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{N}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 7$, $f(3) = 10$, $f(4) = 13$, $f(5) = 16$.

9. Одно из оснований равнобедренной трапеции конгруэнтно боковой стороне, а величина угла при основании равна 30°. Задайте формулой периметр трапеции в виде функции от ее высоты.

10. Приведите примеры функций из различных областей (из практической жизни, из физики, химии, экономики, медицины, геометрии, истории и т. д.).

Развиваем способности и творим

11. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $f(n)$ есть остаток от деления числа n на 5.

а) Вычислите $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$.

б) Докажите, что $f(n+5) = f(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

12. Для $x, y \in \mathbb{R}$ задано соотношение: а) $3x - y = 7$; б) $x^2 + 3y^2 = 8$.

Можно ли выразить y в виде функции от x? А x в виде функции от y?

§ 2. Числовые функции. Повторение и дополнение

2.1. Свойства числовых функций

2.1.1. Монотонность числовых функций

Определение

Функция $f\colon A \to B$ называется **числовой функцией** (или **функцией действительного переменного**), если A и B – подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Пример

Функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 0{,}5x - 1$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$; $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{2}x^3$, являются числовыми функциями.

Рассмотрим числовую функцию $f\colon A \to \mathbb{R}$, где $A \subseteq \mathbb{R}$ и $x_1, x_2 \in A$.

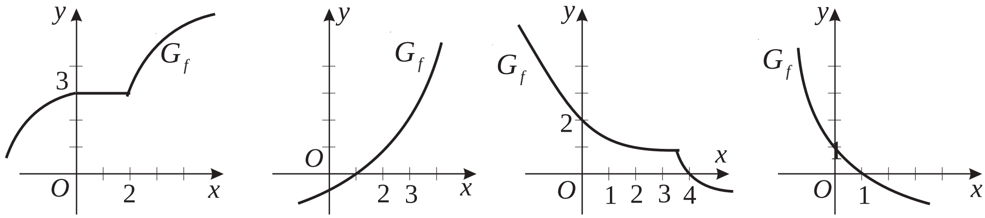
Определения

♦ Функция f называется **возрастающей (строго возрастающей)** на множестве A, если для любых $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$ $((f(x_1) < f(x_2))$.

♦ Функция f называется **убывающей (строго убывающей)** на множестве A, если для любых $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$ $((f(x_1) > f(x_2))$.

♦ Функция f называется **монотонной (строго монотонной)** на ее области определения $D(f)$ или некотором промежутке $I \subseteq D(f)$, если она возрастающая или убывающая (строго возрастающая или убывающая) на множестве $D(f)$ или на промежутке I (рис. 3).

Примеры



а) возрастающая функция

б) строго возрастающая функция

в) убывающая функция

г) строго убывающая функция

Рис. 3

ПРИМЕНИМ

• Определите промежутки монотонности функции f, заданной графическим способом (рис. 4).

Решение:

Функция f на $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ и на $[1, 3]$.

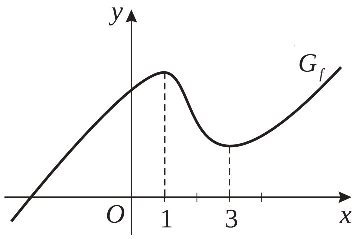


Рис. 4

2.1.2. Нули функции

• Найдите нули функции f, заданной графическим способом (рис. 5).

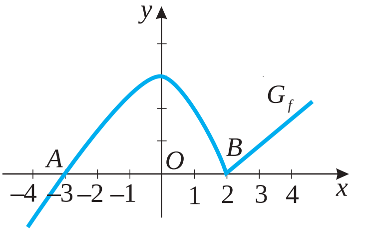


Рис. 5

Решение:

Так как график G_f пересекает ось Ox в точке $A(-3, 0)$, то $x_1 = -3$ является нулем функции f. Поскольку $B(2, 0)$ – общая точка графика G_f и оси Ox, то есть $f(2) = 0$, то $x_2 = 2$ – нуль функции f.

Ответ: Функция f имеет два нуля: ____ и ____.

Определение

Действительное число a называется **нулем функции** f, если $f(a) = 0$.

Действительное число a является нулем функции f тогда и только тогда, когда точка $(a, 0)$ принадлежит графику G_f.

2.2. Числовая функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

Определения

♦ Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **функцией I степени**.

♦ Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **прямой пропорциональностью**, или **линейной функцией**.

♦ Действительное число a называется **коэффициентом пропорциональности**.

♦ Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, называется **постоянной функцией**.

Замечание. Прямая пропорциональность между величинами задается функцией вида $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2.1. *График функции вида* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

График функции вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, – это прямая:

- не проходящая через начало координат и не параллельная оси Ox, если $a \neq 0$, $b \neq 0$ (рис. 6 а));
- проходящая через начало координат $O(0, 0)$, если $b = 0$ (рис. 6 б));
- параллельная оси Ox, если $a = 0$, $b \neq 0$, или это ось Ox, если $a = 0$, $b = 0$ (рис. 6 в)).

Число a называется ***угловым коэффициентом*** прямой – графика функции вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Для построения прямой – графика функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, достаточно построить прямую, заданную двумя точками. Как правило, эти точки являются точками пересечения графика G_f с осями Ox и Oy.

Для линейной функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, достаточно найти одну точку и построить прямую, проходящую через эту точку и начало координат $O(0, 0)$.

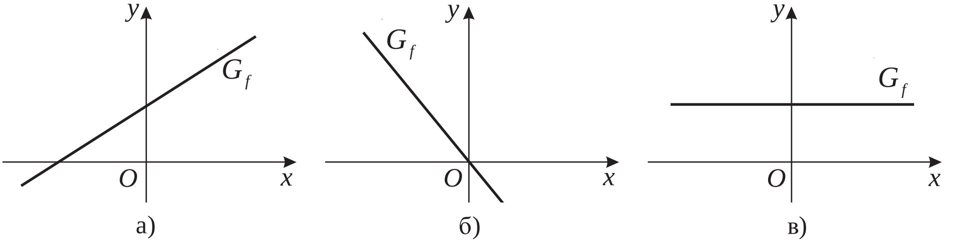


Рис. 6

2.2.2. *Свойства функции вида* $\boldsymbol{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}}$

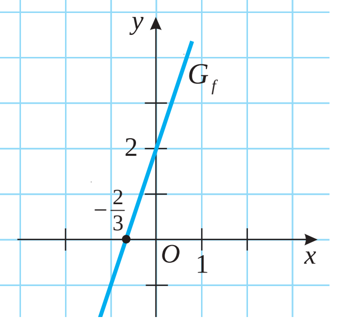


Рис. 7

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ (рис. 7).

1) Исследуйте на монотонность функцию f.

2) Найдите нули функции f.

3) Исследуйте знак функции f.

Решение:

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$.

1) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Значит, функция f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$. Отметим, что $a = 3 > 0$.

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Следовательно, $x = -\frac{2}{3}$ – нуль функции f.

3) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$. Итак, функция f принимает отрицательные значения при $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ и положительные – при $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

ОБОБЩИМ

Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Если $a = 0$, функция f постоянна на множестве $\mathbb{R}$.
- Если $a > 0$, функция f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$.
- Если $a < 0$, функция f строго убывает на множестве $\mathbb{R}$.
- Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, имеет один нуль: $x = -\frac{b}{a}$.
- Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, принимает положительные значения на промежутке, соответствующем множеству решений неравенства $ax + b > 0$, а отрицательные значения – на промежутке, соответствующем множеству решений неравенства $ax + b < 0$.

2.3. Числовая функция вида $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$

Обратной пропорциональностью называется зависимость между двумя величинами x и y, при которой одновременно с возрастанием (убыванием) в несколько раз величины x, во столько же раз убывает (возрастает) величина y.

Обратная пропорциональность между величинами x и y задается соотношением $x\cdot y=k$, где $k\in\mathbb{R}^*_+$ и $x\in(0,+\infty)$.

Определение

Функция $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$, называется **обратной пропорциональностью**.

График обратной пропорциональности – это гипербола, состоящая из двух ветвей:

а) при $k>0$ ее ветви расположены в I и III четвертях (рис. 8);

б) при $k<0$ ее ветви расположены во II и IV четвертях (рис. 9).

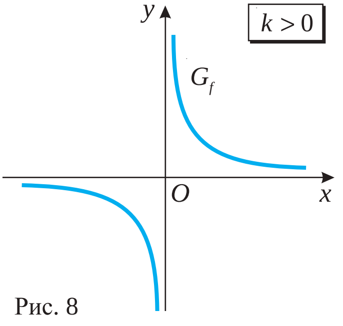


Рис. 8

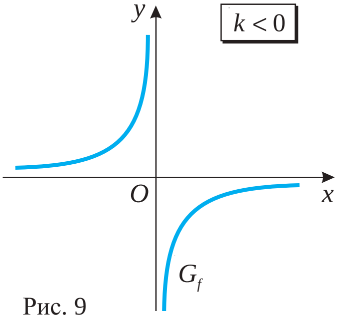


Рис. 9

Свойства функции вида $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$

1° Функция f не имеет нулей; график G_f не пересекает ни ось Ox, ни ось Oy.

2° а) При $k>0$ функция f принимает положительные значения, если $x\in(0,+\infty)$, и отрицательные, если $x\in(-\infty,0)$.

б) При $k<0$ функция f принимает положительные значения, если $x\in$ ______, и отрицательные, если $x\in$ ______.

3° а) При $k>0$ функция строго убывает на интервалах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

б) При $k<0$ функция строго возрастает на интервалах ______, ______.

4° При $k>0$ $(k<0)$ замечаем: чем больше отрицательное или положительное значение x, тем меньше (больше) соответствующее значение y; чем меньше отрицательное значение x, тем больше (меньше) соответствующее значение y; чем меньше положительное значение x, тем больше (меньше) соответствующее значение y.

5° Отметим, что $f(-x)=-f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}^*$.

Действительно, $f(-x)=\dfrac{k}{-x}=-\dfrac{k}{x}=-f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}^*$.

Так как $f(-x)=-f(x)$, следует, что точка $A(x_0,y_0)\in G_f$, тогда и точка $A'(-x_0,\ -y_0)\in G_f$. Значит, график G_f симметричен относительно начала координат $O(0,0)$ (рис. 8, рис. 9).

2.4. Функция радикал $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

Определение

Функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x},$ называется **функцией радикал**.

График функции радикал – это ветвь параболы, расположенная в I четверти (рис. 10).

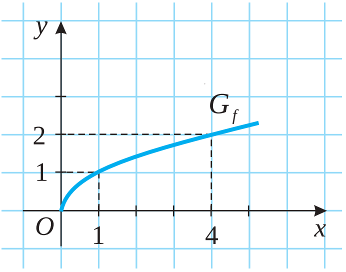


Рис. 10

Свойства функции радикал

1° Функция f имеет единственный нуль, $x=0$, так как $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

График G_f имеет с осями Ox и Oy единственную общую точку: $O(0, 0)$.

2° Функция f принимает только положительные значения при $x\in \mathbb{R}_+^*$.

3° Функция f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}_+$.

2.5. Функция модуль (дополнительно)

Определение

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=|x|,$ называется **функцией модуль (абсолютная величина)**.

ИССЛЕДУЕМ

• Дана функция модуль $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=|x|$.

а) Постройте график G_f.

б) Исследуйте свойства функции f.

Решение:

а) Раскрыв модуль, получим: $f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\in[0, +\infty), \\ -x, \text{ если } x\in(-\infty, 0). \end{cases}$

Следовательно, для $x\in[0, +\infty)$ строим график функции $f\colon [0, +\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x$, а для $x\in(-\infty, 0)$ – график функции $f\colon (-\infty, 0)\to\mathbb{R},\ f(x)=-x$.

Итак, графиком функции $f(x)=|x|$ является прямой угол, вершина которого находится в начале координат. При этом полупрямая $[Oy$ является его биссектрисой (рис. 11).

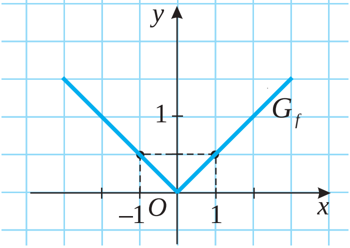


Рис. 11

б) ***Свойства функции модуль***

1° $f(x)=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$. Значит, функция f имеет единственный нуль: $x=0$.

2° Так как $|x|\geq 0$, то для $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функция f принимает положительные значения.

3° Функция f строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$. (Докажите!)

ПРИМЕНИМ

• Постройте график функции
$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=-|3-x|$.

Решение:

Раскрыв модуль, получим:

$$h(x)=-|3-x|=\begin{cases} x-3, \text{ если } x\in(-\infty,\ 3], \\ 3-x, \text{ если } x\in(3,\ +\infty). \end{cases}$$

График функции h изображен на рисунке 12.

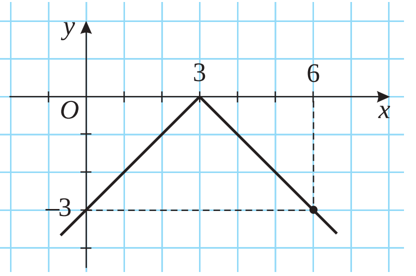


Рис. 12

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Даны точки: (1, 0); (1, 1); (–2, –11); (–2, 10); (–3, 16).
Определите, какие из них принадлежат графику функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=4x-3$; б) $f(x)=-3x+4$; в) $f(x)=-5x+1$.

2. Дана функция: 1) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}5x-4$; 2) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+5$.
а) Постройте график функции f.
б) Найдите нуль функции f.
в) Исследуйте знак функции f.
г) Исследуйте на монотонность функцию f.

3. Дана функция: 1) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-0{,}25x$; 2) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=7x$.
а) Постройте график функции g.
б) Найдите нуль функции g.
в) Исследуйте знак функции g.
г) Исследуйте на монотонность функцию g.

4. Определите без построения графика, возрастает или убывает функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=\sqrt{15}x+3$; б) $f(x)=-\sqrt{3}x-5$; в) $f(x)=-x$; г) $f(x)=7{,}(8)x$.

5. Определите без построения графика, в каких четвертях расположены ветви гиперболы – графика функции $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$:
а) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=-\dfrac{2}{3x}$; в) $f(x)=-\dfrac{\sqrt{7}}{x}$; г) $f(x)=-\dfrac{1+\sqrt{19}}{x}$.

6. Дана функция радикал $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, и $x\in\{4, 7, 9, 25, -36, 0, -49\}$.
Найдите соответствующие значения функции f.

7. Дополните формулу таким действительным числом, чтобы полученная функция $f\colon D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=\square\, x-1$; б) $f(x)=-\square\, x+3$; в) $f(x)=\dfrac{\square}{x}$; г) $f(x)=-\dfrac{\square}{x}$
была: 1) строго возрастающей на множестве D; 2) строго убывающей на множестве D.

Формируем способности и применяем

8. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+b$, при: а) $b=-1$; б) $b=0$; в) $b=2$. Что вы заметили?

9. Изобразите в одной прямоугольной системе координат графики функций:
а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=4x$;
б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=1-2x$.
Что вы заметили?

10. Найдите функцию I степени, если известно, что:

а) $f(1)=4$ и $f(0)=-3$; б) $f(0)=2$ и $f(-2)=5$;

в) $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{3}$ и $f(2\sqrt{6})=3\sqrt{3}$; г) $f(-1)=3$ и $f(2)=-1$.

11. Изобразите графически функцию $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

а) $f(x)=-\dfrac{3}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{4x}$; в) $f(x)=-\dfrac{1}{2x}$; г) $f(x)=\dfrac{5}{x}$.

Исследуйте свойства функции f.

12. Постройте график функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=2\sqrt{x}$; б) $f(x)=\sqrt{x}-1$; в) $f(x)=\sqrt{x}+1$; г) $f(x)=0{,}5\sqrt{x}$.

13. Приведите примеры функциональных зависимостей из окружающей действительности.

Развиваем способности и творим

14. Пусть m – действительный параметр и функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=(m-2)x+4$; б) $f(x)=(m+4)x+m-6$.

Найдите, при каких значениях m функция f: 1) возрастает; 2) убывает.

15. Изобразите графически функцию: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{|x|}$; б) $f(x)=\sqrt{|x-2|}$; в) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{если } 0<x\le 4,\\ 2, & \text{если } x>4.\end{cases}$

16. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}$.

Покажите, что существуют числа $A, B\in\mathbb{R}$, при которых $f(x)=A+\dfrac{B}{x-3}$.

17. Составьте и решите по одному примеру, подобному заданиям **9**, **10**, **14**, **16**.

• Задача для чемпионов **18.** Задайте формулой функцию, зависящую от натурального аргумента, значения которой были бы простыми числами для любого значения аргумента.

• Практическая работа Пронаблюдайте ежедневно, в одно и то же время, на протяжении недели, как меняется температура в вашем городе (селе). Изобразите графически полученные результаты. Задайте формулой функцию, соответствующую каждой части графика.

§ 3. Функция II степени

3.1. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

ИССЛЕДУЕМ

• Дан квадрат со стороной a (рис. 13). Определите функцию, задающую зависимость площади квадрата от длины его стороны.

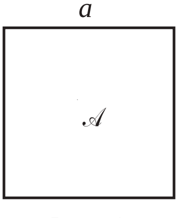


Рис. 13

Решение:

Площадь квадрата со стороной a вычисляется по формуле $\mathscr{A}=a^2$. Следовательно, зависимость площади квадрата от длины его стороны задается функцией $g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x)=x^2$.

Функция g приводит к функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

а) Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

б) Исследуйте свойства функции f.

Решение:

а) Составим таблицу значений функции f для значения нуль и для некоторых отрицательных и положительных значений аргумента x:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Изобразим в заданной прямоугольной системе координат xOy точки, координаты которых приведены в таблице. Соединим эти точки непрерывной линией и получим график G_f (рис. 14).

График G_f функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, называется ***параболой***.

Точка $O(0, 0)$ называется ***вершиной параболы***.

В данном случае говорят, что *ветви* этой параболы *направлены вверх*.

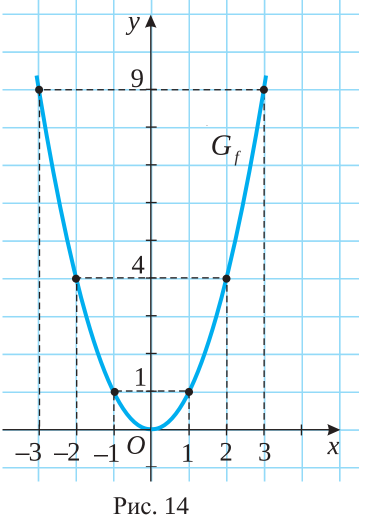


Рис. 14

> ***Внимание!*** При построении параболы мы учитывали тот факт, что не существует трех различных коллинеарных точек, принадлежащих параболе.

б) ***Свойства функции*** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Следовательно, $x = 0$ – нуль функции f.
График G_f пересекает оси Ox и Oy в единственной точке: $O(0, 0)$.

2° $f(x) = x^2 \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Итак, функция принимает только неотрицательные значения.

3° Функция f строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$ и строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$.

4° Отметим, что $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
Действительно, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
Тогда $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f$, а это означает, что график G_f симметричен относительно оси Oy или что ось ординат является осью симметрии графика (рис. 14).

ПРИМЕНИМ

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Найдите значения x, при которых функция f принимает значение: а) 64; б) 0; в) –25.

Решение:

а) $f(x) = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64$. Итак, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$.

б) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$. Следовательно, $x = 0$.

в) $f(x) = -25 \Leftrightarrow x^2 = -25$. Значит, не существует таких действительных значений x.

3.2. Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$

ИССЛЕДУЕМ

• Дан круг радиуса R (рис. 15). Найдите функцию, задающую зависимость площади круга от длины его радиуса.

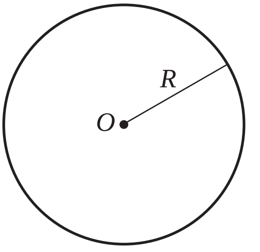


Рис. 15

Решение:

Найдем площадь круга, пользуясь формулой $\mathcal{A} = \pi R^2$. Следовательно, зависимость площади круга от его радиуса задается функцией $h: (0, +\infty) \to (0, +\infty),\ h(x) = \pi x^2$.

Функция h приводит к функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$.

• Даны функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$;

б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2$.

1) Постройте графики функций f и g.

2) Исследуйте свойства функций f и g.

Решение:

1) Составим таблицы значений функций f и g для значения нуль и для некоторых отрицательных и положительных значений аргумента x:

а)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)=2x^2$	8	2	0	2	8

б)

x	–2	–1	0	1	2
$g(x)=-2x^2$	–8	–2	0	–2	–8

Графики G_f и G_g, построенные „по точкам“, изображены на рисунках 16 и 17. График функции f, а также график функции g называется ***параболой***.

Точка $O(0,0)$ называется ***вершиной параболы***.

Говорят, что график функции f – *парабола, ветви которой направлены вверх*, а график функции g – *парабола, ветви которой направлены вниз*.

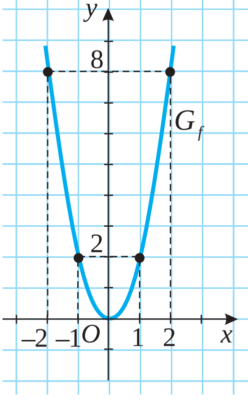


Рис. 16

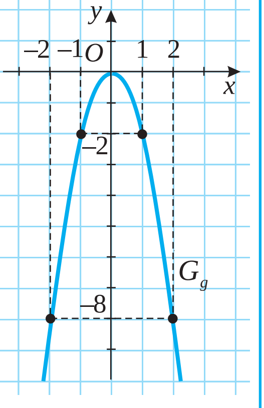


Рис. 17

2) ***Свойства функции***

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2$
1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значит, функция f имеет единственный нуль: $x = 0$. Следовательно, график G_f пересекает оси Ox и Oy в точке $O(0, 0)$.	1° $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значит, функция g имеет единственный нуль: $x = 0$. Следовательно, график G_g пересекает оси Ox и Oy в точке $O(0, 0)$.
2° $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 0$. Значит, функция f принимает неотрицательные значения при любых $x \in \mathbb{R}$.	2° $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0$. Значит, функция g принимает отрицательные значения или значение нуль при любых $x \in \mathbb{R}$.
3° Функция f строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.	3° Функция g строго возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго убывает на промежутке $[0, +\infty)$.
4° $D(f) = \mathbb{R}$. Значит, если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$. Так как $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2 = f(x)$, следует, что график G_f симметричен относительно оси Oy.	4° $D(g) = \mathbb{R}$. Значит, если $x \in D(g)$, то и $-x \in D(g)$. Так как $g(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = g(x)$, следует, что график G_g симметричен относительно оси Oy.
5° Точка $x_0 = 0$ является точкой минимума функции f и $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.	5° Точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции g и $g(x_0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

Определения

Пусть $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, и $x_0 \in A$.

♦ Значение $f(x_0)$ называется **минимумом** функции f на множестве A, если $f(x) \geq f(x_0)$ для любого $x \in A$. Обозначают: $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$. В этом случае говорят, что x_0 является **точкой минимума** функции f.

♦ Значение $f(x_0)$ называется **максимумом** функции f на множестве A, если $f(x) \leq f(x_0)$ для любого $x \in A$. Обозначают: $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$. В этом случае говорят, что x_0 является **точкой максимума** функции f.

♦ Точки минимума и максимума называются **точками экстремума** (от латинского *extremum* – крайнее) функции f, а значения функции f в этих точках называются **экстремумами функции** f.

Свойства функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$

1° График G_f является параболой, вершина которой находится в начале координат $O(0, 0)$ и: а) ветвями, направленными вверх, если $a > 0$;
б) ветвями, направленными вниз, если $a < 0$.
График G_f пересекает оси Ox и Oy в единственной точке $O(0, 0)$.

2° Функция f имеет единственный нуль: $x = 0$.

3° Функция f принимает неотрицательные значения, если $a > 0$, и отрицательные значения или значение нуль, если $a < 0$.

4° а) При $a > 0$ функция f строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

б) При $a < 0$ функция f строго возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго убывает на промежутке $[0, +\infty)$.

5° а) Если $a > 0$, то $f(0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ и $x_0 = 0$ – точка минимума функции f.

б) Если $a < 0$, то $f(0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ и $x_0 = 0$ – точка максимума функции f.

6° График G_f симметричен относительно оси Oy.

ПРИМЕНИМ

• Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}5x^2$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$.

Решение:

Составим таблицу значений функций f и g:

а)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8
$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4

б)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x) = -0{,}5x^2$	–2	–0,5	0	–0,5	–2
$g(x) = -x^2$	–4	–1	0	–1	–4

Графики функций f и g изображены на рисунках 18 и 19.

а)

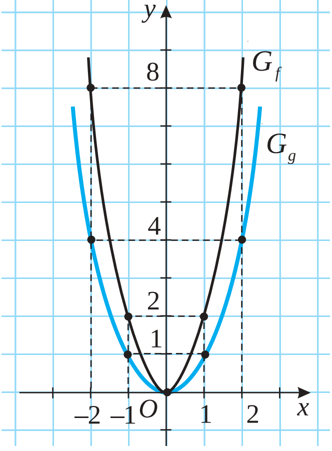


Рис. 18

б)

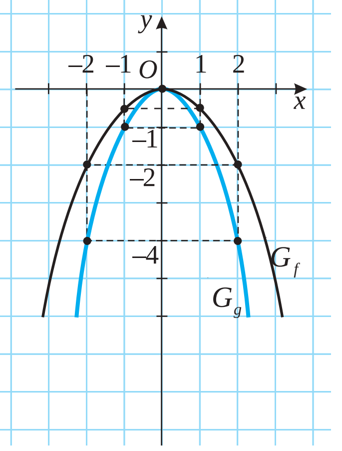


Рис. 19

Замечание. Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$, возможны случаи, приведенные на рисунках 20 и 21.

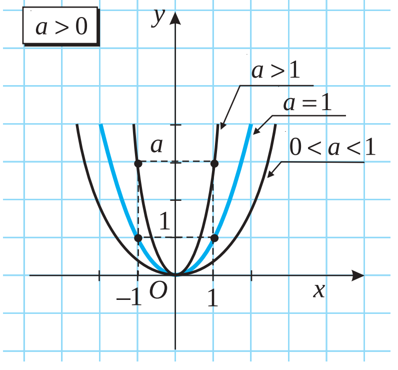


Рис. 20

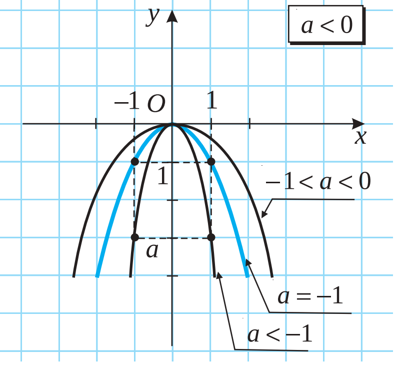


Рис. 21

3.3. Преобразование графиков

3.3.1. График функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = ax^2 + n,\quad a \neq 0,\quad n \in \mathbb{R}^*$

ИССЛЕДУЕМ

• Дана функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{1}{2}x^2.$

Постройте график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2.$

Решение:

Составим таблицу значений функций g и f:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10

Графики функций g и f изображены на рисунке 22.

Замечаем, что при параллельном переносе на 2 единицы вверх каждой точки графика G_g получаем соответствующую точку графика G_f. Таким образом, график функции f получается из графика функции g с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на 2 единицы вверх.

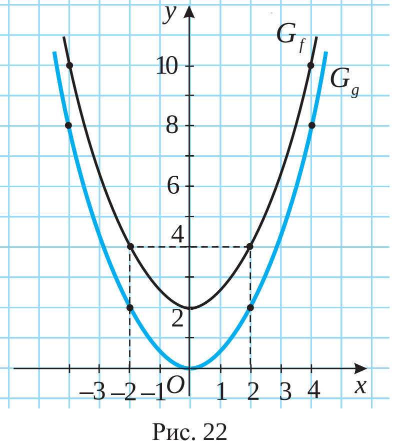


Рис. 22

ПРИМЕНИМ

• Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Постройте график функции $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

Решение:

Составим таблицу значений функций g и h:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$	5	1,5	–1	–2,5	–3	–2,5	–1	1,5	5

Графики функций g и h изображены на рисунке 23.

Замечаем, что график функции h получается из графика функции g с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на 3 единицы вниз.

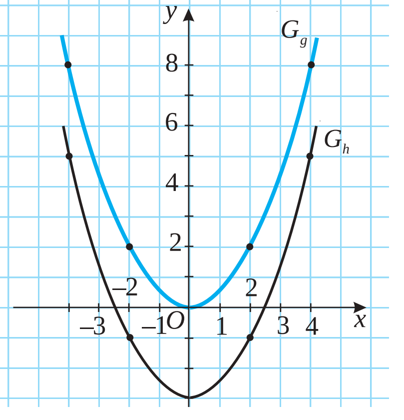


Рис. 23

ОБОБЩИМ

График функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = ax^2 + n, \ a \neq 0, \ n \in \mathbb{R}^*$, является параболой, которую можно получить из графика функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = ax^2, \ a \neq 0$, с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy вверх на n единиц, если $n > 0$, или вниз на $-n$ единиц, если $n < 0$.

3.3.2. *График функции* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = a(x-m)^2, \ a \neq 0, \ m \in \mathbb{R}^*$

ИССЛЕДУЕМ

• Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

Решение:

Составим таблицу значений функций g и f:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5

Графики функций g и f изображены на рисунке 24.

Замечаем, что при параллельном переносе каждой точки графика G_g вдоль оси Ox на 2 единицы вправо получаем соответствующую точку графика G_f. Таким образом, график функции f получается из графика функции g с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 2 единицы вправо.

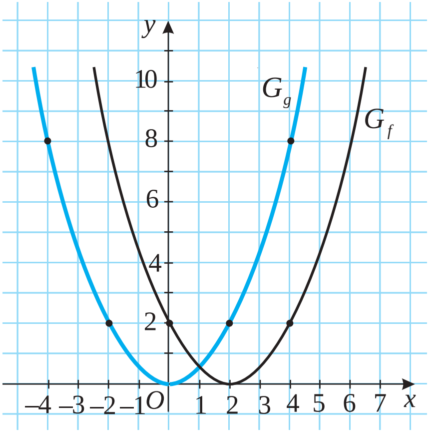


Рис. 24

ПРИМЕНИМ

• Дана функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Постройте график функции $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{1}{2}(x+3)^2$.

Решение:

Составим таблицу значений функций g и h:

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$g(x)=\frac{1}{2}x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5
$h(x)=\frac{1}{2}(x+3)^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32

Графики функций g и h изображены на рисунке 25.

Замечаем, что при параллельном переносе каждой точки графика G_g вдоль оси Ox на 3 единицы влево получаем соответствующую точку графика G_h. Таким образом, график функции h получается из графика функции g с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 3 единицы влево.

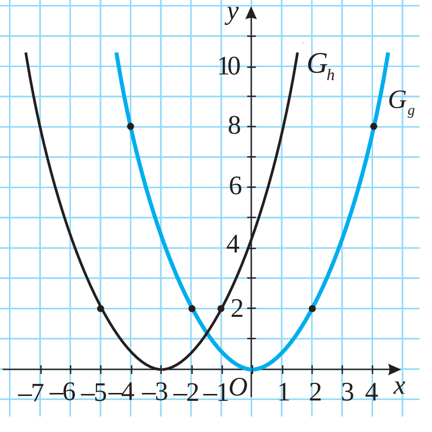


Рис. 25

ОБОБЩИМ

График функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a(x-m)^2,\ a\neq 0,\ m\in\mathbb{R}^*$, является параболой, которую можно получить из графика функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=ax^2,\ a\neq 0$, с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox вправо на m единиц, если $m>0$, или влево на $-m$ единиц, если $m<0$.

Задание

Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если: а) $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2x^2 + 1$, $h(x) = -2x^2 - 3$;

б) $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x-1)^2$, $h(x) = -2(x+2)^2$.

3.4. Исследование функции вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

ИССЛЕДУЕМ

• Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 6$.

а) Постройте график функции f.

б) Исследуйте свойства функции f.

Решение:

а) 1. Находим точки пересечения графика G_f с осью Ox:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \text{ или } x = 2.$$

Следовательно, график G_f пересекает ось Ox в точках $A(-1{,}5;\ 0)$ и $B(2;\ 0)$.

2. Находим точку пересечения графика G_f с осью Oy: $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 6 = -6$. Значит, график G_f пересекает ось Oy в точке $C(0, -6)$.

3. Находим ось симметрии графика G_f:

$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f\left(-x + \frac{1}{4}\right)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, что доказывает, что если точка $E\left(x + \frac{1}{4},\ y\right) \in G_f$, то и точка $E'\left(-x + \frac{1}{4},\ y\right) \in G_f$, то есть прямая, заданная уравнением $x = \frac{1}{4}$, является осью симметрии графика G_f (рис. 26).

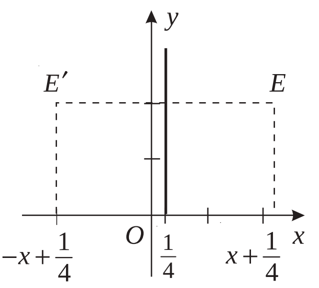


Рис. 26

4. Находим координаты вершины параболы.

Так как $x = \frac{1}{4}$ – ось симметрии графика G_f, то $x_0 = \frac{1}{4}$ – абсцисса вершины параболы G_f, а ее ордината равна $y_0 = f(x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = -\frac{49}{8}$.

Следовательно, точка $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ является вершиной параболы.

5. Составляем таблицу значений функции f для абсцисс точек пересечения графика G_f с осями Ox, Oy и для некоторых других значений аргумента x:

x	–2	–1,5	0	$\frac{1}{4}$	2	3
$f(x) = 2x^2 - x - 6$	4	0	–6	$-\frac{49}{8}$	0	9

6. Строим „по точкам“ график G_f и получаем *параболу с ветвями, направленными вверх* (рис. 27).

б) Пользуясь графиком G_f, исследуем свойства функции f:

1° Функция f имеет два нуля: $x_1 =$ ……, $x_2 =$ …… .

2° $f > 0$ для $x \in$ …… и $f < 0$ для $x \in$ …… .

3° Функция f:
строго убывает на промежутке …… и
строго возрастает на промежутке …… .

4° $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f($ …… $) =$ …… и точка $x =$ …… – точка минимума функции f.

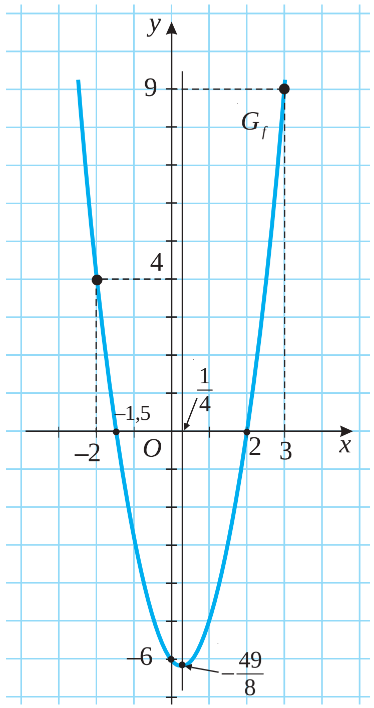


Рис. 27

Определение

Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **функцией II степени**, или **квадратичной функцией**.

Так как действительное число a ненулевое, выделив полный квадрат, получим:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \text{ или}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{-\Delta}{4a} \qquad (1)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$, где $\Delta = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующего функции f. Равенство (1) называется ***каноническим видом функции*** f.

Из (1) следует, что для того, чтобы от графического изображения функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, перейти к графическому изображению функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, необходимо выполнить два параллельных переноса графика G_g:

1) вдоль оси Ox на $-\frac{b}{2a}$ единиц (вправо, если $-\frac{b}{2a} > 0$, и влево, если $-\frac{b}{2a} < 0$);

2) вдоль оси Oy на $-\frac{\Delta}{4a}$ единиц (вверх, если $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, и вниз, если $-\frac{\Delta}{4a} < 0$).

Задание. Дана функция:

а) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 2$; б) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - x^2$.

1. Постройте: а) график функции g; б) график функции h.
2. Исследуйте: а) свойства функции g; б) свойства функции h.

Внимание!

Абсцисса x_0 вершины параболы G_f вычисляется по формуле $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Для вычисления ординаты y_0 вершины параболы G_f используем формулу $y_0 = f(x_0)$.

3.4.1. Множество значений функции II степени

При любых значениях $x \in \mathbb{R}$ значения выражения $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ принадлежат промежутку $[0, +\infty)$, а значения выражения $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ принадлежат промежутку:

а) $[0, +\infty)$, если $a>0$; б) $(-\infty, 0]$, если $a<0$.

Итак, из (1) и а), б) следует, что:

1) $E(f)=\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, если $a>0$; 2) $E(f)=\left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$, если $a<0$.

ПРИМЕНИМ

• Дана функция:

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-7x+12$; б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x^2-2x+1$.

Найдите $E(f)$.

Решение:

а) $f(x)=x^2-7x+12=\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$. Поскольку $a=1>0$, то $E(f)=\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

б) $f(x)=-3x^2-2x+1=$ ______. Так как $a=-3<0$, то $E(f)=$ ______.

Задание. Дана функция $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2-x-x^2$. Найдите $E(g)$.

3.4.2. Экстремумы функции II степени

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a, b, c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, и ее канонический вид $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}$, где $\Delta=b^2-4ac$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

1) *Случай* $a>0$

Так как $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ и $a>0$, то и $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$.

Тогда $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}\geq-\dfrac{\Delta}{4a}$. Значит, $f(x)\geq\dfrac{-\Delta}{4a}$ (2) для любого $x\in\mathbb{R}$.

Очевидно, что $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ только при $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Тогда $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ (3).

Таким образом, из (2) и (3) следует, что $f(x)\geq f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ (4) для любого $x\in\mathbb{R}$.

Из (2) и (4) следует, что $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ и $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – точка минимума функции f (рис. 28).

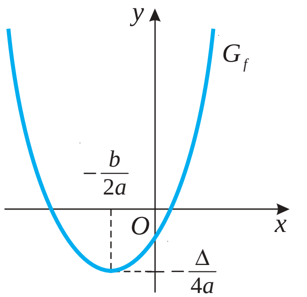


Рис. 28

2) *Случай* $a<0$

Так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ и $a<0$, то и $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$. Тогда $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$.

Значит, $f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Учитывая (3), получим $f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (5) для любого $x \in \mathbb{R}$.

Из (5) следует, что $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$ и $x_0=-\frac{b}{2a}$ – точка максимума функции f (рис. 29).

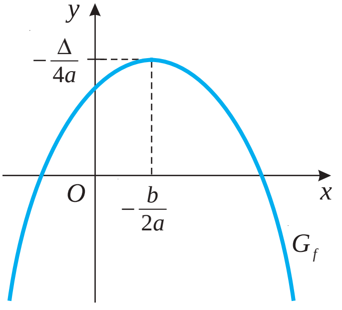


Рис. 29

ПРИМЕНИМ

• Даны функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=x^2-7x+12$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=-3x^2-2x+1$.

Найдите точки экстремума и экстремумы функций f и g.

Решение:

а) Так как $a=1>0$, получим $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-7}{2}=3{,}5$ – точка минимума функции f и $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)=f(3,5)=-\frac{1}{4}$.

б) Поскольку $a=-3<0$, получим $x_0=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ – точка максимума функции g и $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x)=g($ ______ $)=$ ______.

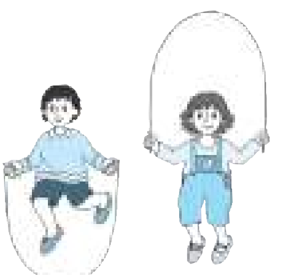
Задание. Дана функция $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x)=4-x^2$. Найдите точки экстремума и экстремумы функции h.

3.4.3. Промежутки монотонности функции II степени

ОБОБЩИМ

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$ – функция II степени.

- Если $a>0$, функция f строго убывает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ и строго возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (рис. 28).
- Если $a<0$, функция f строго возрастает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ и строго убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (рис. 29).
- Промежутки $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ и $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ называются ***промежутками монотонности функции*** f.



ПРИМЕНИМ

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: а) $f(x) = 3x^2 + x - 8$; б) $f(x) = -0{,}3x^2 - 6x + 3$.
Найдите промежутки монотонности функции f.

Решение:

а) Так как $a = 3 > 0$ и $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$, то функция f строго убывает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]$ и строго возрастает на промежутке $\left[-\frac{1}{6}, +\infty\right)$.

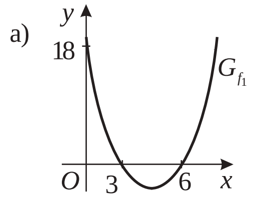
б) Поскольку $a = -0{,}3 < 0$ и $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-0{,}3)} = -10$, то функция f строго возрастает на промежутке $(-\infty, -10]$ и строго убывает на промежутке $[-10, +\infty)$.

Задание. Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - x$. Найдите промежутки монотонности функции g.

3.4.4. Нули функции II степени

• Даны функции: а) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 9x + 18$;
б) $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 4x^2 - 4x + 1$;
в) $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = -x^2 + x - 1$.

Найдите нули функций f_1, f_2, f_3.



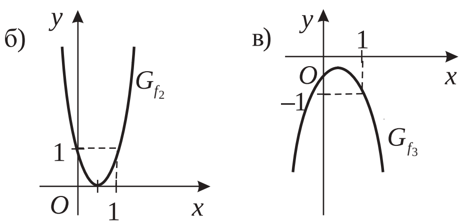


Рис. 30

Решение:

а) $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = 3$, $x_2 = 6$. Следовательно, функция f_1 имеет два нуля: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ (рис. 30 а)).

б) $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$.
Значит, функция имеет единственный нуль: $x = 0{,}5$ (рис. 30 б)).

в) $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0$.
Это уравнение не имеет действительных решений. (Обоснуйте!)
Таким образом, функция f_3 не имеет нулей (рис. 30 в)).

ОБОБЩИМ

Нулями функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, являются *действительные решения уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующего функции f.

Напомним, что количество действительных решений уравнения II степени зависит от значения ее дискриминанта $\Delta = b^2 - 4ac$.

- При $\Delta > 0$, уравнение II степени имеет два действительных решения, а функция f – два нуля: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Следовательно, график G_f пересекает ось Ox в двух точках: $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.
- При $\Delta = 0$, уравнение II степени имеет одно действительное решение, а функция f – единственный нуль: $x = -\frac{b}{2a}$.
  Значит, график G_f имеет одну общую точку с осью Ox: $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

- При $\Delta < 0$ уравнение II степени не имеет действительных решений, то есть функция f не имеет нулей. Следовательно, график G_f не пересекает ось Ox.

  Задание. Даны функции: а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$;
  б) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x$. Найдите нули функций f и g.

3.4.5. Знак функции II степени

ИССЛЕДУЕМ

• Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Найдите множество значений $x \in \mathbb{R}$, при которых $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

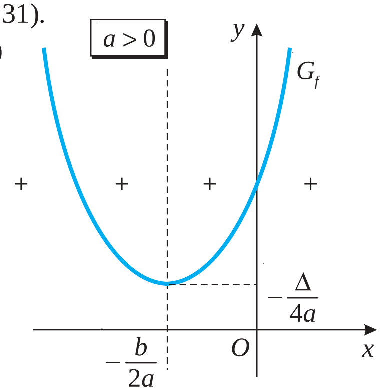
Решение:

Знак функции f зависит от знака дискриминанта Δ уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующего функции f.

Запишем функцию f в каноническом виде: $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$.

1) *Случай* $\Delta < 0$

Знак значений функции f совпадает со знаком коэффициента a для любого $x \in \mathbb{R}$ (рис. 31).

а) 

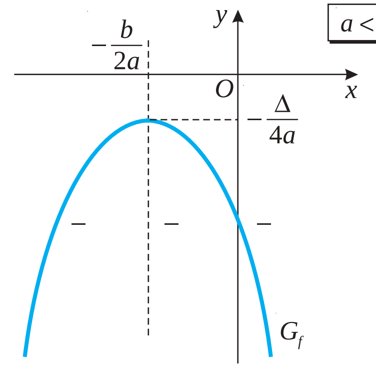
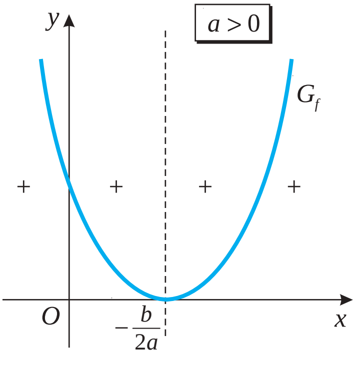
б) 

Рис. 31

2) *Случай* $\Delta = 0$

Знак значений функции $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ совпадает со знаком коэффициента a для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ (рис. 32).

а) 

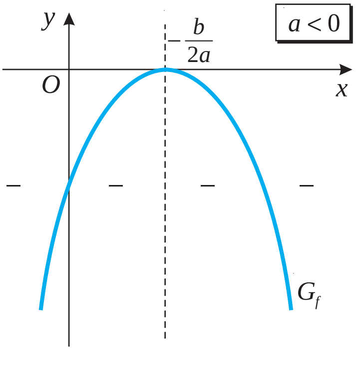
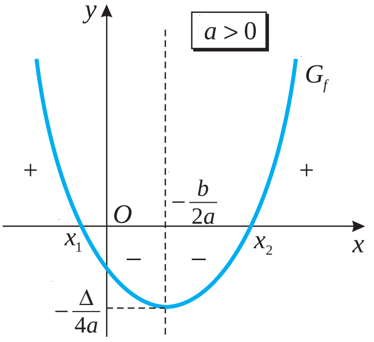
б) 

Рис. 32

3) *Случай* $\Delta > 0$

Знак значений функции f, нули которой $x_1 < x_2$, совпадает со знаком коэффициента a для любого $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, и противоположен знаку коэффициента a для любого $x \in (x_1, x_2)$ (рис. 33).

а)



б)

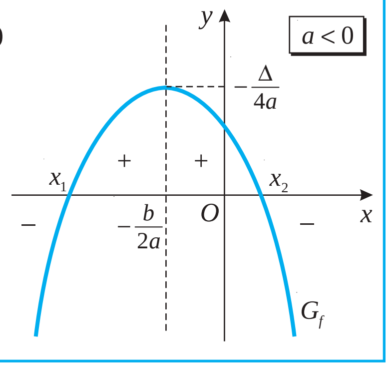


Рис. 33

Замечание. Знак функции II степени и ее промежутки монотонности проще определить при помощи графика этой функции.

Задание. Даны функции: а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 2$;

б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 3$. Найдите множество значений $x \in \mathbb{R}$, при которых $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) и $g(x) > 0$ ($g(x) < 0$).

3.4.6. График функции II степени

ИССЛЕДУЕМ

Для построения графика функции II степени поступаем следующим образом:

① Находим координаты точек пересечения графика G_f:

а) с осью Ox: решаем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующее функции f; решения уравнения являются нулями функции f;

б) с осью Oy: вычисляем $f(0)$.

② Находим координаты вершины параболы: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ и ось симметрии $x = -\frac{b}{2a}$ параболы.

③ Составляем таблицу, называемую ***таблицей изменений*** функции f. Таблица содержит абсциссы точек пересечения графика G_f с осями Ox и Oy (при условии, что такие точки существуют), абсциссы вершины параболы и другие значения аргумента.

④ Заполняя таблицу изменений, одновременно определяем промежутки монотонности функции, ее точки экстремумов и экстремумы, а также поведение графика G_f на $-\infty$ и соответственно на $+\infty$.

⑤ Строим график функции.

Замечание. Символом $\searrow$ обозначим убывающую функцию, а символом $\nearrow$ обозначим возрастающую функцию.

ПРИМЕНИМ

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

а) Постройте график функции f.

б) Исследуйте функцию на монотонность, определите знак и экстремумы функции f.

Решение:

а) ① Находим координаты точек пересечения графика G_f с осью Ox: решаем уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$, соответствующее функции f; так как $\Delta = -8 < 0$, то график G_f не пересекает ось Ox.

Находим координаты точки пересечения графика G_f с осью Oy: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$; следовательно, график G_f пересекает ось Oy в точке $(0, 3)$.

② Находим координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(x_0) = 2$.

Итак, точка $V(1, 2)$ – вершина параболы. Следовательно, прямая, заданная уравнением $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$, является осью симметрии графика G_f.

③–④ Составляем таблицу изменений функции f:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x + 3$	$+\infty$	6	3	2	3	6	$+\infty$
Вывод		$\searrow$		min		$\nearrow$	

⑤ Строим график функции f – параболу G_f (рис. 34).

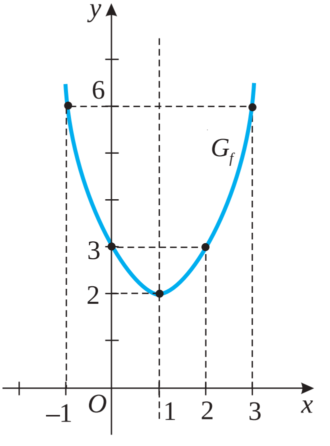


Рис. 34

б) Функция f принимает положительные значения для любого $x \in \mathbb{R}$. Функция f строго убывает на промежутке $(-\infty, 1]$ и строго возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Точка $x = 1$ является точкой минимума функции f и $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 2$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Найдите:

а) значения x, при которых функция f принимает значения: 36; –4; 0,25; 100; 7; –1,6;

б) значения функции f при следующих значениях x: 1,4; – 0,2; – 3; 0,4; 2; $\sqrt{5}$; 7,(2); $-4\sqrt{3}$.

2. Даны точки: а) $A(2; -2)$; б) $B(1; 2)$; в) $C(-1; 0{,}5)$; г) $D(1; -0{,}5)$; д) $E(0{,}5; 0{,}5)$.

Выясните, какие из них принадлежат графику функции:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$; 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}5x^2$; 3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x^2$.

3. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 3x^2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$; в) $f(x) = -1{,}5x^2$; г) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2$.

1) Постройте график функции f. 2) Исследуйте свойства функции f.

4. а) Найдите функцию, задающую зависимость площади полной поверхности куба от длины его ребра.
б) Постройте график этой функции.
в) Найдите:
1) площадь полной поверхности куба, если известно, что длина его ребра равна: 0,5 см; 1,2 дм; 3 м.
2) длину ребра куба, если известно, что площадь его полной поверхности равна: 16 см^2; $8\sqrt{3}$ дм^2; 4 м^2.

5. Впишите такие действительные числа, чтобы точка $A(\square, \square)$ принадлежала графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = -x^2$; в) $f(x) = 3x^2$;
г) $f(x) = -2{,}5x^2$; д) $f(x) = 3x(x-2)$; е) $f(x) = -0{,}5x(x+1)$;
ж) $f(x) = x^2 - x - 2$; з) $f(x) = -3x^2 + x + 1$; и) $f(x) = x^2 + 3x + 5$.

6. Даны функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2{,}3x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x^2$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x^2$.
Найдите: а) экстремумы; б) промежутки монотонности; в) знак функций.

7. Найдите (если существуют) нули функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 16x^2 - 4$; б) $f(x) = 6x^2 + 3$; в) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; г) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$.

8. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; б) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$; в) $f(x) = x^2 - x + 4$;
г) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$; д) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$.
1) Постройте график функции f.
2) Найдите ось симметрии графика и исследуйте свойства функции f.

Формируем способности и применяем

9. Постройте график и исследуйте свойства функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = 2x^2 - 1$; в) $f(x) = 3(x+2)^2$;
г) $f(x) = -2(x-1)^2$; д) $f(x) = 4(x+2)^2 - 6$; е) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$.

10. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 4{,}7x^2$; б) $f(x) = -3x^2 + 2$; в) $f(x) = 4(x-1)^2$;
г) $f(x) = -2(x+3)^2$; д) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; е) $f(x) = 3(x-4)^2 + 5$.
Найдите множество значений $E(f)$.

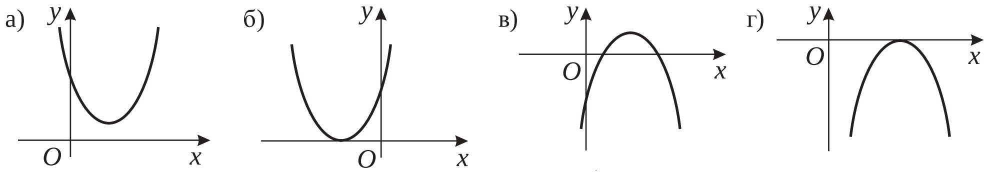
11. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:
а) $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 + 2$, $h(x) = 3x^2 - 4$;
б) $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x+1)^2 + 3$, $h(x) = -2(x-3)^2 - 4$.
Что вы заметили?

12. Дана таблица изменений функции f:

x	$-\infty$	-1	0	2	$3{,}5$	5	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	$+\infty$	18	10	0	$-2{,}25$	0	$+\infty$
Вывод		$\searrow$			min		$\nearrow$

Постройте график функции f.

13. Дан график функции II степени:



Найдите знаки коэффициента a и дискриминанта Δ уравнения, соответствующего функции, заданной графически.

14. Поставьте один из знаков „<“, „>“, „=“, чтобы получить истинное высказывание:

1) Если график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, – парабола с ветвями вниз и вершиной на оси Ox, то $a \,\square\, 0$, $\Delta \,\square\, 0$.

2) Если график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, – парабола с ветвями вверх и вершиной на оси Oy, то $a \,\square\, 0$, $\Delta \,\square\, 0$.

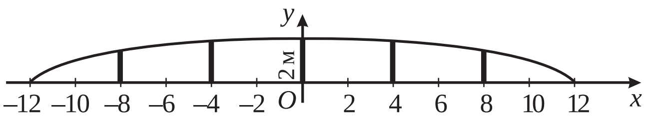
15. Пусть h – высота (в метрах), на которой находится брошенный вверх мяч, t – время (в секундах) нахождения мяча в движении. Зависимость переменной h от переменной t задается формулой: $h = 24t - 4{,}9t^2$.

а) Какова максимальная высота, которую достигает мяч?

б) За какое время мяч поднимается, и за какое – падает?

в) Через сколько секунд после подбрасывания мяч упадет на землю?

16. Перила моста имеют форму дуги параболы. Высота перил равна 2 м, а длина соответствующей хорды – 24 м. Перила опираются на 5 вертикальных столбов, зафиксированных в точках, делящих хорду на части равной длины. Найдите длины этих столбов.



17. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (x+2)(x-4)$; б) $f(x) = -6x(x+1)$; в) $f(x) = -2(x-3)(5-x)$;

г) $f(x) = 5(x-1)(x-3)$; д) $f(x) = -(x-3)(x-4)$; е) $f(x) = 4x(x-2)$.

18. Парабола 1) $y = 3x^2$; 2) $y = -0{,}5x^2$ была смещена на 2 единицы вдоль оси Ox и на 3 единицы вдоль оси Oy.

а) Задайте функцию g, графиком которой является парабола, полученная в результате заданных преобразований. Сколько таких функций можно задать?

б) Постройте график G_g для каждой из полученных функций.

19. Длина стороны AC треугольника ABC равна a, а высота, проведенная к этой стороне, равна – h. Через точку D высоты BM проведена прямая, параллельная стороне AC. Задайте площади полученных фигур в виде функций, зависящих от аргумента x, где $x = BD$.

20. Найдите, пользуясь графиками, а затем аналитически, точки пересечения графиков функций: а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - x + 4$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$.

21. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$	7
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + x - 3$	?

Развиваем способности и творим

22. Найдите значения действительного параметра a, при которых функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ имеет нули: а) $f(x) = ax^2 + 7$; б) $f(x) = ax^2 - 4$; в) $f(x) = x^2 + a$; г) $f(x) = 2x^2 - a$.

23. При каких значениях коэффициентов b и c вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ находится в точке $V(-3, 6)$?

24. Задайте функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, если известно, что ее график проходит через точки $A(-2, 0)$, $B(1, 6)$ и ее максимум равен 6.

25. Приведите и решите примеры, подобные заданиям **13**, **15**, **16**, **18**, **21**, **23**.

26. Постройте график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{если } x \geq 3, \\ 3 - x, & \text{если } x < 3; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } x > 0, \\ x - 2, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$

• ***Задача для чемпионов*** **27.** Постройте график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^2 - 6|x| - 7$; б) $f(x) = x^2 - 5|x + 4| - 26$; в) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

§ 4. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

ИССЛЕДУЕМ

• Дан куб с ребром a. Найдите функцию, задающую зависимость объема куба от длины его ребра.

Решение:

Объем куба вычисляется по формуле $\mathcal{V} = a^3$. Следовательно, зависимость объема куба от длины его ребра задается функцией

$g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x) = x^3$.

Эта функция приводит к функции

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

• Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

а) Постройте график функции f.

б) Исследуйте свойства функции f.

Решение:

а) Составим таблицу значений функции f для значения нуль и для некоторых отрицательных и положительных значений аргумента x:

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3$	8	1	0	1	8

График, построенный „по точкам“, изображен на рисунке 35.

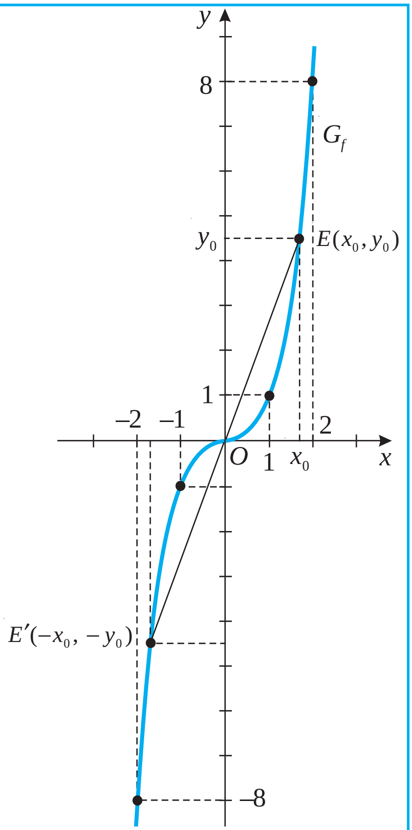


Рис. 35

б) ***Свойства функции*** $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$

1° $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0$. Значит, $x=0$ – нуль функции f.

2° Функция f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$.

3° Функция f принимает отрицательные значения при $x\in(-\infty,\ 0)$ и положительные – при $x\in(0,\ +\infty)$.

4° Так как $f(-x)=-f(x)$, следует, что точка $E(x_0,\ y_0)\in G_f$, тогда и точка $E'(-x_0,\ -y_0)\in G_f$. Значит, график G_f симметричен относительно начала координат $O(0,\ 0)$ (рис. 35).

График функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$, называется ***кубической параболой***.

5° Функция f не имеет экстремумов.

ПРИМЕНИМ

• Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$. Найдите значения x, при которых функция f принимает значение: а) -64; б) $\frac{27}{8}$; в) 125.

Решение:

а) $x^3=-64 \Leftrightarrow x=-4$; б) $x^3=\frac{27}{8} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$; в) $x^3=125 \Leftrightarrow x=5$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Даны точки: а) $A(-2,\ 8)$; б) $B(3,\ 27)$; в) $C\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8}\right)$; г) $D(0,\ 1)$; д) $E(-\sqrt{3},\ -3\sqrt{3})$.

Какие из них принадлежат графику функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$?

2. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$. Найдите:

а) значения x, при которых $f(x)$ равно: 125; –64; –16; 3,375; –1; 0,001.

б) значения f при следующих значениях x: -343; $0{,}2$; $-\frac{2}{5}$; $1{,}3$; $2\sqrt{2}$; 10; $2,(5)$.

Формируем способности и применяем

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$, графическим методом уравнение:

а) $x^3=x-1$; б) $x^3=-2x$; в) $x^3=3x+2$; г) $x^3=3-x$.

4. 1) Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^3$;

б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3+1$.

2) Найдите знаки функций f и g.

3) Найдите экстремумы функций f и g.

Развиваем способности и творим

5. Найдите экстремумы функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^3-2$; б) $f(x)=(x+2)^3$; в) $f(x)=2(x-8)^2+1$; г) $f(x)=-5x+1$.

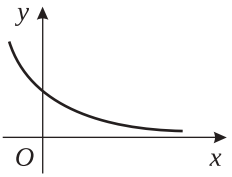
6. Постройте график функции: $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^3, & x\le 0\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

7. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|^3$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=|x^3|$.

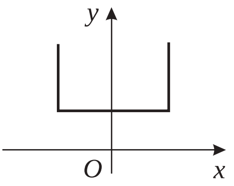
Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

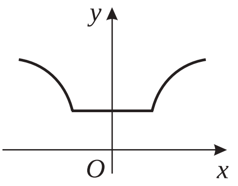
1. Выясните, какая из заданных линий не является графиком функции:



а)



б)



в)

Обоснуйте!

2. Дана функция:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - 2x$; б) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{2}{x}$; г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$;

д) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x + 1$; е) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

Какие из заданных точек принадлежат графику G_f:

1) $A(-1, 1)$; 2) $B(1, 1)$; 3) $C(0, 1)$; 4) $O(0, 0)$;

5) $D(1, -2)$; 6) $E(0, 3)$; 7) $F(4, 2)$; 8) $M(-2, 1)$?

3. Выявите функцию II степени:

а) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{5}{x^2}$; б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q},\ f(x) = 7 - x^2$;

в) $f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R},\ f(x) = -1{,}6x^2$; г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 + x^2 - 4$;

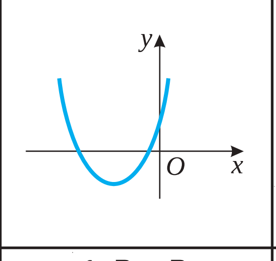
д) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x - 1$; е) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x^3$.

4. Выясните, график какой из указанных функций изображен:

а)

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_1(x) = -x^2 + 3x + 4$

$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_4(x) = -3x^2 - x + 2$



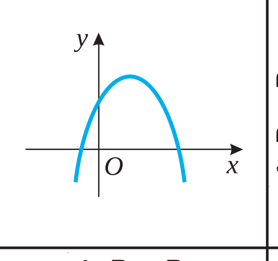
$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_2(x) = x^2 - 6x + 7$

$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_3(x) = x^2 + 6x + 7$

б)

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_1(x) = 0{,}5x^2 + x + 3$

$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_4(x) = -2x^2 + 4x + 5$



$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_2(x) = -x^2 - x - 1$

$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f_3(x) = 5x^2 - x - 1$

Формируем способности и применяем

5. Дано множество $P=\{a, b, c, d\}$. Задайте в виде диаграмм все функции, определенные на множестве P со значениями в множестве P.

6. Запишите формулу, задающую зависимость длины окружности от ее радиуса. Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

7. У Марианны 15 леев. После того, как она купила x почтовых марок по 0,5 лея, у нее осталось y леев.
а) Задайте формулой зависимость y от x.
б) Найдите область определения полученной функции.

8. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=-1{,}5x+b$, для $b \in \{-2, 0, 2, 5\}$.
Что вы заметили?

9. Постройте график и определите свойства функции $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, если:
а) $f(x)=-\dfrac{4}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$; в) $f(x)=\dfrac{7}{x}$; г) $f(x)=-\dfrac{1}{5x}$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ графическим методом уравнение:
а) $\sqrt{x}=3x-2$; б) $\dfrac{25}{x}=x$; в) $\dfrac{1}{2x}=2x$; г) $3x^2=5x-2$.

11. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+n$, для $n \in \{-1, 0, 1, 3\}$.
Что вы заметили?

12. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=-2(x-m)^2$, для $m \in \{-1, 0, 1, 3\}$.
Что вы заметили?

13. Вода в электрочайнике в исходный момент времени имеет температуру 10°C. Через каждую минуту нагревания температура воды возрастает на 4°C и достигает 100°C. Задайте формулой зависимость температуры воды (в градусах Цельсия) от времени нагрева t (в минутах). Постройте график этой зависимости. Используя график, определите:
а) температуру воды через:
1) 5 минут; 2) 10 минут;
3) 15 минут; 4) 20 минут от начала нагревания.
б) через сколько минут температура воды достигла:
1) 50°C; 2) 70°C; 3) 100°C.

14. Постройте график и исследуйте свойства функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если:
а) $f(x)=1-x-x^2$; б) $f(x)=x^2-6x+9$; в) $f(x)=9x^2-6x+1$; г) $f(x)=3x^2+4x+2$.

15. Определите ось симметрии графика и экстремумы функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x)=5x^2+3$; б) $f(x)=x^2-4$; в) $f(x)=-3(x+2)^2$; г) $f(x)=6x^2-x+3$.

16. Задайте формулой функцию II степени, которая:
а) строго возрастает на промежутке $(-\infty, 4]$ и строго убывает на промежутке $[4, +\infty)$;
б) строго убывает на промежутке $(-\infty, -2]$ и строго возрастает на промежутке $[-2, +\infty)$.

17. Параболу – график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2$, сдвинули на 2 единицы вдоль оси Oy и на 3 единицы вдоль оси Ox.

а) Задайте формулой функцию g, графиком которой является парабола, полученная в результате преобразования графика функции f. Сколько функций g можно задать?

б) Постройте график каждой из полученных функций в пункте а).

в) Исследуйте свойства каждой из полученных функций в пункте а).

18. Найдите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x^2 - x - 15$; б) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

19. Приведите примеры применения изученных функций в повседневной деятельности, в физике, биологии, химии, экономике и т. д.

Развиваем способности и творим

20. Задайте формулой функцию I степени, для которой выполняется условие:

а) $f(2+x) = -5x + 3$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

б) $f(3x-1) = 1 - 2x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

21. Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2, \text{ если } x \le 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ б) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9, \text{ если } x \le -2, \\ -\dfrac{2}{x}, \text{ если } -2 < x < 2, \\ -0{,}5x, \text{ если } x \ge 2. \end{cases}$

22. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + bx + c$.

Найдите коэффициенты b и c, если известно, что вершина параболы G_f находится в точке $A(-2, 4)$.

23. Задайте формулой функцию II степени, если известно, что ее график проходит через точки:

а) $A(-3, 0)$, $B(2, 5)$ и ее максимум равен 5;

б) $A(0, 2)$, $B(-1, 4)$ и ее минимум равен 3.

24. Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3|x| - 4$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |0{,}2x + 5|$;

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |3x^2 - x - 2|$.

25. Решите на множестве $\mathbb{R}$ графическим методом уравнение:

а) $x^3 = x^2 + x + 1$; б) $2x = x^3 - 4$.

26. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x + 1$. При каких действительных значениях a справедливо соотношение $f(a) = -3f(-a) + 6$?

27. Составьте и предложите одноклассникам для решения примеры, подобные заданиям 13, 16, 17, 21, 25.

• Задача для чемпионов

28. Постройте график функции:

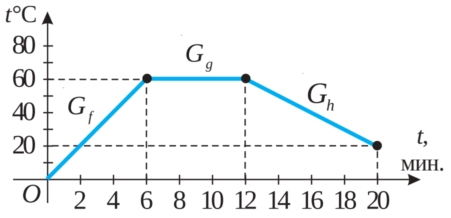
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x^3$.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. На рисунке изображен график изменения температуры воды в течение 20 минут:



а) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно: „G_f – график возрастающей функции“. 1 б

И **Л**

б) На сколько градусов поднялась температура воды за первые 6 минут? 2 б

в) На сколько градусов изменилась температура воды за последние 8 минут? 2 б

г) В какой период времени температура воды не менялась? 2 б

д) Задайте формулами функции, представленные графиками G_f, G_g и G_h. 7 б

2. Найдите действительные значения x, при которых функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-(x-4)^2$, и $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, $g(x)=\dfrac{4}{x}$, убывают. Обоснуйте ответ! 5 б

3. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2-5x-3$.

а) Впишите в рамку один из знаков „<“, „=“ или „>“, чтобы высказывание было истинным: „$f(0)\ \square\ f(-1)$“. 3 б

б) Постройте график G_f. 6 б

в) Найдите $E(f)$. 2 б

г) Заполните рамки: $f\nearrow$ при $x\in\square$; 2 б

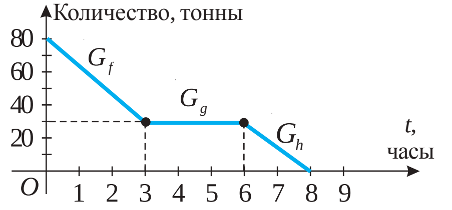
$f\searrow$ при $x\in\square$; 2 б

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\square$. 2 б

д) Приведите пример из физики относительно применения функции II степени. 2 б

II вариант

1. На рисунке изображен график вывоза зерна из склада на протяжении 8 часов:



а) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно: „G_f – график возрастающей функции“.

И **Л**

б) На сколько тонн уменьшилось количество зерна после первых трех часов?

в) На сколько тонн уменьшилось количество зерна на складе за последние два часа?

г) В какой период времени зерно со склада не вывозилось?

д) Задайте формулами функции, представленные графиками G_f, G_g и G_h.

2. Найдите действительные значения x, при которых функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-(x+2)^2$, и $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, $g(x)=-\dfrac{8}{x}$, возрастают. Обоснуйте ответ!

3. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-5x+2$.

а) Впишите в рамку один из знаков „<“, „=“ или „>“, чтобы высказывание было истинным: „$f(-2)\ \square\ f(1)$”.

б) Постройте график G_f.

в) Найдите $E(f)$.

г) Заполните рамки: $f\searrow$ при $x\in\square$;

$f\nearrow$ при $x\in\square$;

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\square$.

д) Приведите пример из окружающей действительности относительно применения функции II степени.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	38–37	36–33	32–29	28–23	22–17	16–12	11–8	7–5	4–3	2–0

Глава

3 Многочлены и алгебраические дроби

§ 1. Одночлены. Операции над одночленами

1.1. Понятие одночлена

ИССЛЕДУЕМ

• Даны алгебраические выражения:

$8y$; $-3x^2+y$; $2\sqrt{ab^3}$; $\sqrt{7}ab$; $6{,}5x^5y^2z^3$; 2010; $-9-11a^2b$; $\sqrt{xy}$.

а) Выпишите выражения, содержащие действия сложения и вычитания.

б) Выпишите выражения, не содержащие буквы под знаком корня.

в) Выпишите выражения, содержащие буквы под знаком корня.

г) Выпишите выражения, в которых нет действий сложения и вычитания, не содержащие буквы под знаком корня.

Решение:

а) $-3x^2+y$; $-9-11a^2b$ $\rightarrow$ рациональные алгебраические выражения;

б) $8y$; $-3x^2+y$; $\sqrt{7}ab$; $6{,}5x^5y^2z^3$; 2010; $-9-11a^2b$ $\rightarrow$ рациональные алгебраические выражения;

в) $2\sqrt{ab^3}$; $\sqrt{xy}$ $\longrightarrow$ иррациональные алгебраические выражения;

г) $8y$; $\sqrt{7}ab$; $6{,}5x^5y^2z^3$; 2010 $\longrightarrow$ рациональные алгебраические выражения.

ОБОБЩИМ

- ***Алгебраические выражения*** – это числа и буквы, соединенные при помощи знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения квадратного корня.
- ***Рациональные алгебраические выражения*** не содержат букв под знаком корня.
- Выражения, содержащие буквы под знаком корня, являются ***иррациональными выражениями***..

Определение

Рациональные алгебраические выражения, содержащие только произведение чисел, букв и их степеней с натуральными показателями, называются **одночленами**.

- Одночлен состоит из ***коэффициента*** (***числового множителя***) и ***буквенной части***.
- Буквы в одночленах называются ***переменными***.
- Переменные одночленов обозначаются прописными латинскими буквами (X, Y, Z, ...).

$\rightarrow$ $\boxed{3}\,X^3Y$; $\boxed{-0{,}2}\,Z^4$; $\boxed{\sqrt{2}}\,XY^3Z^2$.

1.2. Стандартный (канонический) вид одночлена

ИССЛЕДУЕМ

• Дан одночлен $3{,}4XYX^3YZ^3$.

а) Запишите одночлен так, чтобы каждая переменная содержалась в нем только один раз.

б) Найдите степень одночлена относительно переменной X.

в) Найдите степень одночлена относительно всех его переменных.

Решение:

а) Применяя свойства степени, получим $3{,}4X^4Y^2Z^3$.

б) Так как в записи имеем X^4, то степень одночлена относительно X равна 4.

в) Степень одночлена относительно всех его переменных равна $4+2+3=9$.

- Одночлен имеет ***стандартный*** (***канонический***) ***вид***, если он записан в виде произведения коэффициента, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных с натуральными показателями.
- ***Степень одночлена стандартного вида относительно одной из его переменных*** равна показателю степени этой переменной.
- ***Степень одночлена стандартного вида относительно всех его переменных*** равна сумме показателей степеней всех входящих в него переменных.
- ***Если одночлен не содержит переменных*** (то есть является числом), то его степень считают равной нулю.

1.3. Операции над одночленами

1.3.1. Сложение одночленов

ИССЛЕДУЕМ

• Выполните действия:

а) $3X^2Y-0{,}5XY+1{,}5X^2Y+2XY-X^3$; б) $8X^2+16X-9X^2-10X+3X^2$.

Решение:

а) $\underline{3X^2Y}-\underline{\underline{0{,}5XY}}+\underline{1{,}5X^2Y}+\underline{\underline{2XY}}-X^3=3X^2Y+1{,}5X^2Y-(0{,}5XY-2XY)-X^3=$

$=(3+1{,}5)X^2Y-(0{,}5-2)XY-X^3=4{,}5X^2Y+1{,}5XY-X^3$;

б) $\underline{8X^2}+\underline{\underline{16X}}-\underline{9X^2}-\underline{\underline{10X}}+\underline{3X^2}=(8-9+3)X^2+(16-10)X=2X^2+6X$.

- Одночлены, состоящие из одних и тех же переменных, возведенные в одинаковые степени, независимо от порядка записи переменных, имеют одинаковые буквенные части.
- Одночлены, состоящие из одних и тех же буквенных частей, называются ***подобными одночленами*** или ***подобными слагаемыми***.
- ***Приведение подобных слагаемых*** – это преобразование, которое сводит сумму подобных одночленов к одному одночлену, подобному данным. Результат приведения двух или более подобных одночленов есть одночлен, подобный данным, коэффициент которого равен сумме коэффициентов подобных одночленов.
- Можно сложить или вычесть только одночлены с одинаковой буквенной частью.

Задание. Сформулируйте правило сложения двух или более одночленов.

1.3.2. *Произведение одночленов*

ИССЛЕДУЕМ

• Выполните умножение: а) $-3X^2Y \cdot 4XYZ$; б) $5X \cdot \sqrt{2}XY^2$.

Решение: Применяя свойства степени, получим:

а) $-3X^2Y \cdot 4XYZ = (-3 \cdot 4) \cdot (X^2 \cdot X) \cdot (Y \cdot Y) \cdot Z = -12X^3Y^2Z$;

б) $5X \cdot \sqrt{2}XY^2 = (\square \cdot \square) \cdot (\bigcirc \cdot \bigcirc) \cdot Y^2 = \square \cdot \bigcirc^2 \cdot Y^2$.

Произведение двух или нескольких одночленов является одночленом.

Задание. Сформулируйте правило умножения двух одночленов.

1.3.3. *Возведение в степень с натуральным показателем*

ИССЛЕДУЕМ

• Выполните возведение в степень: а) $(2X^3YZ^4)^3$; б) $(-Y^2Z)^{125}$.

Решение: Применяя свойства степени, получим:

а) $(2X^3YZ^4)^3 = 2^3 \cdot (X^3)^3 \cdot Y^3 \cdot (Z^4)^3 = 8X^9Y^3Z^{12}$;

б) $(-Y^2Z)^{125} = (-1)^{125} \cdot \square \cdot \square = -\square\,\square$.

При ***возведении ненулевого одночлена в натуральную степень*** снова получается одночлен.

***Замечания.* 1.** При возведении ненулевого одночлена в нулевую степень результатом является одночлен 1. $\longrightarrow$ $(5XY^3)^0 = 1$.

2. При возведении ненулевого одночлена в первую степень результатом является сам одночлен. $\longrightarrow$ $(0{,}2X^2Y)^1 = 0{,}2X^2Y$.

Задание. Сформулируйте правило возведения одночлена в степень с натуральным показателем.

1.3.4. *Деление одночленов*

ИССЛЕДУЕМ

• Выполните деление: а) $6X^3Y^2Z : 2X^2YZ$; б) $-4XY : 0{,}1X$.

Решение: Применяя свойства степени, получим:

а) $6X^3Y^2Z : 2X^2YZ = (6:2) \cdot (X^3 : X^2) \cdot (Y^2 : Y) \cdot (Z : Z) = 3 \cdot X \cdot Y \cdot 1 = 3XY$;

б) $-4XY : 0{,}1X = -(\square : \square) \cdot (\square : \square) \cdot Y = -\square \cdot \square \cdot Y = -\square Y$.

- Если существует одночлен в стандартном виде, причем единственный, который является частным от деления двух одночленов, то говорят, что можно выполнить деление этих одночленов.
- Нельзя делить одночлен на одночлен 0.
- Не определено деление $\dfrac{0}{0}$, так как существует более, чем один одночлен стандартного вида, например, X, Y^2, Z^3 такие, что $X \cdot 0 = 0$, $Y^2 \cdot 0 = 0$, $Z^3 \cdot 0 = 0$.

Задание. Сформулируйте правило деления двух одночленов.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Какие из следующих выражений являются одночленами:

а) $2{,}05,\ \sqrt{X}Y,\ X,\ \sqrt{15}YZ;\ Z^{2010},\ \dfrac{XY}{Z},\ X^2+Y^2;$

б) $-Y^8,\ 3\sqrt{2}XY,\ Z,\ \sqrt{XY},\ Z-X^3,\ \dfrac{X+Y}{Z},\ Y^{2012}$?

2. Назовите коэффициент и буквенную часть одночлена:

а) $-8XY$; б) $2X^2YZ$; в) $-\sqrt{3}XZ^2$; г) $7{,}8Y^4Z^{10}$.

3. Приведите к стандартному виду одночлен:

а) $XYYXZ$; б) $YZYZYZ$; в) XYX^2Y^2Z; г) $XZYZYZ$.

4. Найдите степень одночлена:

1) относительно переменной X; 2) относительно всех его переменных.

а) X^3YZ; б) $-2XZ^5$; в) $0{,}1X^2Y$; г) $\sqrt{3}YZ$.

5. Перечислите подобные одночлены:

а) $5XY,\ 3X^2,\ -XY,\ Z^3Y,\ -0{,}25X^2,\ YZ^3,\ XYZ$;

б) $XY^2,\ -8{,}5Y^3,\ -2Y^2X,\ 0{,}8Y^3,\ X^3Y^3Z^3,\ XY$.

6. Приведите подобные слагаемые:

а) $XY-3Y^4+2{,}5XY+8Y^4$; б) $3Z^2-2XY-0{,}2Z^2+10XY$.

7. Выполните умножение:

а) $-4X^2Y\cdot 3XY^2$; б) $8{,}2XZ\cdot 5X^3YZ$; в) $\sqrt{3}YZ\cdot\sqrt{3}XZ^3$; г) $7\frac{1}{3}X\cdot 2\frac{1}{2}XY$.

8. Выполните возведение в степень:

а) $(3X^5Y)^3$; б) $(-2XYZ^4)^2$; в) $(\sqrt{2}XY^3)^4$; г) $(1{,}5ZY^3)^3$.

9. Выполните деление:

а) $16X^3Y:(-2XY)$; б) $-6{,}4Y^2Z^3:0{,}4YZ$; в) $2\sqrt{3}X^2Z^5:\sqrt{3}XZ^2$; г) $7\frac{1}{3}X^3Y^3Z^3:\frac{1}{3}XYZ$.

Формируем способности и применяем

10. Выполните действия:

а) $7{,}3XY-8Y^3+2(0{,}5Y^3+XY)-ZY$; б) $3\frac{1}{4}ZY+4\left(\frac{1}{8}ZY-Z^2\right)+3Z^2+XY$.

11. Выполните действия: а) $3XY\cdot 0{,}2X^2Y^3Z-(2XY)^3+(1{,}2XY)^2\cdot XY$;

б) $-5ZY\cdot 0{,}4Z^3YX+(0{,}1ZY^2)^2\cdot X^3Y-(-XYZ)^3$.

12. Выполните действия: а) $18X^3Y^5:0{,}3XY^4-(2X^2Y+4{,}8X^4Z:1{,}6XZ)$;

б) $-9XY^3Z^2:30Y^2Z-(-7XYZ+12X^2Z^2:0{,}4XZ^2)$.

13. Впишите такие показатели степени, чтобы степень одночлена относительно всех его переменных была равна 10:

а) $3X^{\square}Y^2Z^{\square}$; б) $(Y^2Z^3)^{\square}$; в) $(X^{\square}Y^{\square}Z)^3$; г) $(-\sqrt{5}X^2Y^{\square}Z^{\square})^2$.

14. Найдите закономерность и впишите пропущенный одночлен:

$\sqrt{2}X^2Y^3$	3	$2\sqrt{2}X^6Y^9$
$-\sqrt{3}ZY^5$	2	?

Развиваем способности и творим

15. а) Степень многочлена X^3YZ равна 6.
б) Одночлен XY^2Z^5 имеет степень, равную 8.
в) Одночлены XY и X^2Y^2 являются подобными.
г) Одночлены $26X^2Y$ и $-X^2Y$ могут быть приведены.

16. Дополните последовательность одночленов:
а) $XYZ,\ X^2YZ,\ X^2Y^2Z,\ \square$;
б) $X^8Y^4Z^2,\ X^8Y^4,\ X^8Y^2,\ \square$.

17. Впишите такие показатели степени, чтобы степень полученного одночлена относительно всех его переменных была числом, кратным: 1) 3; 2) 5.
а) $((X^2Y^3)^{\square})^{\square}$;
б) $((XY^2Z)^{\square})^{\square}$.

§ 2. Многочлены. Операции над многочленами

2.1. Понятие многочлена

ИССЛЕДУЕМ

• Fie expresiile algebrice raıoionale: $X^2;\ -X^3+X;\ X^2Y^5;\ X^5+X^4+2X^3+X^2+X+1;$ $ZY+XZ;\ XY-3X^2Y^2;\ Z^3+X-2;\ (XY)\cdot(ZX^2);\ X^{2016}-X^{2015};\ (Z^3Y^2)\cdot(7Z).$
а) Выпишите одночлены.
б) Выпишите произведения одночленов.
в) Выпишите суммы одночленов.

Определение

Многочленом называется алгебраическая сумма двух или нескольких одночленов.

- Многочлены могут быть от одной или от нескольких переменных.
- Многочлены обозначаются прописными латинскими буквами (P, Q, R, H, ...).

Примеры

$P(X)=X^3-2X^2+5;\ Q(X,Y)=3X^2Y-XY+X;\ R(X,Y,Z)=XYZ-3.$

Задание. Выпишите и обозначьте многочлены рубрики **ИССЛЕДУЕМ**.

- ***Коэффициентами многочлена*** являются коэффициенты его слагаемых. Многочлен, коэффициенты которого равны нулю, называется ***нулевым многочленом***. Нулевой многочлен обозначается 0. Многочлен, в записи которого нет переменных, называется ***постоянным многочленом***.
- Слагаемое многочлена, не содержащее переменную, называется ***свободным членом***.
- Многочлен, состоящий из двух слагаемых, называется ***двучленом*** или ***биномом***, а из трех слагаемых – ***трехчленом***.

Замечание. Далее, как правило, будем рассматривать многочлены от одной переменной.

ИССЛЕДУЕМ

• Даны одночлены: $7X \cdot X^3,\ 3X^2 \cdot (-5X^3),\ 8X \cdot X \cdot (-X),\ (X^3)^2,\ -7X,\ 5^2$.

а) Запишите одночлены в стандартном виде.

б) Укажите степень каждого одночлена.

в) Запишите многочлен $P(X)$ в виде суммы данных одночленов, в порядке убывания их степеней.

г) Приведите многочлен $P(X)$ к стандартному виду.

д) Найдите степень многочлена $P(X)$.

е) Перечислите коэффициенты многочлена $P(X)$, записанного в стандартном виде.

ж) Укажите свободный член многочлена $P(X)$.

Решение:

а) $7X^4,\ -15X^5,\ -8X^3,\ X^6,\ -7X,\ 25$.

б) 4, 5, 3, 6, 1, 0.

в) $P(X) = X^6 + (-15X^5) + 7X^4 + (-8X^3) + (-7X) + 25$.

г) $P(X) = X^6 + (-15)X^5 + 7X^4 + (-8)X^3 + 0X^2 + (-7)X + 25$.

д) Степень многочлена $P(X)$ равна 6.

е) 1, –15, 7, –8, 0, –7, 25. ж) 25.

Многочлен от одной переменной представлен в ***стандартном*** (***каноническом***) виде, если его одночлены записаны в стандартном виде и в порядке убывания их степеней. Многочлен имеет только один стандартный вид.

Два многочлена ***тождественно равны***, если они имеют один и тот же стандартный вид.

Степенью многочлена называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Степень многочлена $P(X)$ обозначается **grad *P*(*X*)** (от латинского *gradus* – степень). Степень нулевого многочлена не определяется.

ПРИМЕНИМ

Для многочлена $P(X) = 2X^3 - \sqrt{3}X - 1$ имеем:

а) $P(X) = 2X^3 + 0X^2 + (-\sqrt{3})X + (-1) \longrightarrow$ стандартный вид;

б) $\operatorname{grad} P(X) = \square$;

в) $\square \longrightarrow$ свободный член.

ОБОБЩИМ

• Стандартный вид многочленов первой степени от переменной X:
$P(X) = aX + b$, где a и b – действительные числа, $a \neq 0$.

• Стандартный вид многочленов второй степени от переменной X:
$P(X) = aX^2 + bX + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

• Стандартный вид многочленов третьей степени от переменной X:
$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Многочлен от одной переменной имеет канонический вид:

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_2X^2+a_1X+a_0,\ \ a_n\neq 0.$$

Слагаемое a_nX^n называется ***старшим членом*** многочлена $P(X)$, число a_n называется ***старшим коэффициентом*** многочлена $P(X)$, а коэффициент a_0 – ***свободным членом*** этого многочлена.

Замечание. Для упрощения записи конкретного многочлена условимся опускать слагаемые с нулевыми коэффициентами, слагаемые вида $1X^k$ заменять на X^k, а выражения вида $+(-a)X^k$ – на $-aX^k$. Например, многочлен $X^4+(-5)X^3+1X^2+0X+3$ запишем в виде $X^4-5X^3+X^2+3$.

2.2. Значение многочлена

ИССЛЕДУЕМ

• Вычислите значение многочлена $P(X,\ Y)=X^2Y-2XY$ при $X=1,\ \ Y=-3$.

Решение:

$P(1,\ -3)=1^2\cdot(-3)-2\cdot1\cdot(-3)=3.$

• Вычислите значение многочлена $Q(X)=2X^3-X+5$ при $X=0$.

Решение:

$Q(0)=2\cdot\square^3-\square+5=\square.$

Задание. Сформулируйте правило вычисления значения многочлена.

ПРИМЕНИМ

Вычислите значение многочлена:

а) $P(X,Y,Z)=X^2-Y^2+Z^2$ при $X=0,\ \ Y=1,\ \ Z=-1;$

б) $Q(X)=-2X^7+X^5-1$ при $X=-1.$

Решение:

а) $P(0,1,-1)=\square^2-\square^2+\square^2=\square;$

б) $Q(-1)=-2\square^7+\square^5-1=\square.$

2.3. Сложение и вычитание многочленов

ИССЛЕДУЕМ

• Даны многочлены $P(X)=-5X^4+3X^3-\sqrt{2}X+4$ и $Q(X)=2X^4-7X^3+X$.

Выполните действия: а) $P(X)+Q(X)$; б) $P(X)-Q(X)$; в) $-Q(X)$.

Решение:

а) $P(X)+Q(X)=(-5X^4+3X^3-\sqrt{2}X+4)+(2X^4-7X^3+X)=$

$=(-5X^4+2X^4)+(3X^3-7X^3)+(-\sqrt{2}X+X)+4=-3X^4-4X^3+(1-\sqrt{2})X+4.$

б) $P(X)-Q(X)=(-5X^4+3X^3-\sqrt{2}X+4)-(2X^4-7X^3+X)=$
$=(-5-2)X^4+(3+7)X^3+(-\sqrt{2}-1)X+4=-7X^4+10X^3-(1+\sqrt{2})X+4.$

в) $-Q(X)=-(2X^4-7X^3+X)=-2X^4+7X^3-X.$

• Чтобы сложить (вычесть) два многочлена, надо сложить (вычесть) подобные слагаемые.

• Многочлен $-P(X)$ является ***противоположным*** многочлену $P(X)$.

Свойства сложения многочленов

1° ***Коммутативность***: $P(X)+Q(X)=Q(X)+P(X)$ для любых многочленов $P(X)$, $Q(X)$.

2° ***Ассоциативность***: $(P(X)+Q(X))+R(X)=P(X)+(Q(X)+R(X))$ для любых многочленов $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.

3° Нулевой многочлен является ***нейтральным элементом*** при сложении многочленов: $P(X)+0=P(X)$ для любого многочлена $P(X)$.

4° Для любого многочлена $P(X)$ существует ***противоположный*** ему многочлен $-P(X)$: $P(X)+(-P(X))=0$.

2.4. Умножение многочленов

ИССЛЕДУЕМ

• Даны многочлены $P(X)=3X^2-X+1$, $Q(X)=X-1$.

Выполните умножение:

а) $-5X^3\cdot P(X)$; б) $P(X)\cdot Q(X)$.

Решение:

а) $-5X^3\cdot P(X)=-5X^3\cdot(3X^2-X+1)=-5X^3\cdot 3X^2+(-5X^3)\cdot(-X)+(-5X^3)\cdot 1=$
$(-5\cdot 3)X^3\cdot X^2+[-5\cdot(-1)]\cdot X^3\cdot X+(-5\cdot 1)\cdot X^3=-15X^5+5X^4-5X^3.$

б) $P(X)\cdot Q(X)=(3X^2-X+1)(X-1)=3X^2\cdot(X-1)-X\cdot(X-1)+1(X-1)=$
$3X^3-3X^2-X^2+X+X-1=3X^3-4X^2+2X-1.$

• Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждое слагаемое многочлена и полученные произведения сложить.

• Чтобы умножить многочлены $P(X)$ и $Q(X)$, надо каждое слагаемое многочлена $P(X)$ умножить на каждое слагаемое многочлена $Q(X)$ и полученные произведения сложить. Полученный многочлен $(P(X)\cdot Q(X))$ приводят к стандартному виду.

• $\operatorname{grad}(P(X)\cdot Q(X))=\operatorname{grad}P(X)+\operatorname{grad}Q(X)$.

Свойства умножения многочленов

1° ***Коммутативность***: $P(X)\cdot Q(X)=Q(X)\cdot P(X)$ для любых многочленов $P(X)$, $Q(X)$.

2° ***Ассоциативность***: $(P(X)\cdot Q(X))\cdot R(X)=P(X)\cdot(Q(X)\cdot R(X))$ для любых многочленов $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.

3° $P(X)\cdot 0=0$ для любого многочлена $P(X)$.

4° 1 является ***нейтральным элементом*** при умножении многочленов: $P(X)\cdot 1=1\cdot P(X)$ для любого многочлена $P(X)$.

5° Умножение многочленов ***дистрибутивно относительно сложения*** (***вычитания***): $P(X)(Q(X)\pm R(X))=P(X)\cdot Q(X)\pm P(X)\cdot R(X)$ для любых многочленов $P(X), Q(X), R(X)$.

ПРИМЕНИМ

Даны многочлены $P(X)=X^3+1,\ Q(X)=-2X^7,\ R(X)=X^4-1.$

Выполните действия и запишите полученный многочлен в стандартном виде:

а) $P(X)\cdot(Q(X)-R(X))$;

б) $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)$.

Сравните полученные результаты.

Решение:

а) $P(X)\cdot(Q(X)-R(X))=(X^3+1)(-2X^7-X^4+1)=$

$X^3\cdot \square - X^3\cdot X^4+X^3\cdot 1-2X^7-X^4+1=\square\cdot X^{10}-\square-\square+\square+\square$;

б) $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)=(X^3+1)\cdot(-2X^7)-(X^3+1)\cdot(X^4-1)=$

$X^3\cdot(-2X^7)-2X^7-X^7+X^3-X^4+1=\square\cdot X^{10}-\square-\square+\square+\square$.

Вывод: Полученные многочлены ____________, так как имеют ____________.

2.5. Разложение многочленов на неприводимые множители

ИССЛЕДУЕМ

• Разложите на неприводимые множители многочлен:

а) X^4+4X^2; б) X^3-3X^2+3X-9; в) X^3-1; г) $27X^3+1$; д) $2X^2+X-3$.

Решение:

а) $X^4+4X^2=X^2\cdot X^2+4\cdot X^2=X^2\cdot(X^2+4)$.

б) $X^3-3X^2+3X-9=X\cdot X^2-3\cdot X^2+3\cdot X-3\cdot 3=$

$=X^2(X-3)+3(X-3)=(X-3)(X^2+3)$.

в) $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$.

г) $27X^3+1=(3X)^3+1=(3X+1)(9X^2-3X+1)$.

д) Найдем решения уравнения $2x^2+x-3=0$, соответствующего трехчлену. Получаем $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{3}{2}$. Тогда $2X^2+X-3=2(X-1)\left(X+\dfrac{3}{2}\right)$. (Проверьте!)

Итак, $2X^2+X-3=(X-1)\left(2\cdot X+2\cdot\dfrac{3}{2}\right)=(X-1)(2X+3)$.

Разложить многочлен на неприводимые множители – значит представить его в виде произведения двух или нескольких неприводимых многочленов, степени которых не меньше 1. Многочлен является ***неприводимым***, если его нельзя разложить на множители.

Методы разложения многочленов на множители

♦ ***метод вынесения общего множителя***: $XY+XZ+XT=X(Y+Z+T)$;

♦ ***метод группировки***: $XQ+YQ+XP+YP=(XQ+XP)+(YQ+YP)=$
$=X(Q+P)+Y(Q+P)=(Q+P)(X+Y)$;

♦ ***формулы сокращенного умножения***:
- формула сведения к квадрату суммы (разности): $X^2\pm 2XY+Y^2=(X\pm Y)^2$,
- формула сведения к кубу суммы (разности): $X^3\pm 3X^2Y+3XY^2\pm Y^3=(X\pm Y)^3$,
- формула разности квадратов: $X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$,
- формула суммы (разности) кубов: $X^3\pm Y^3=(X\pm Y)(X^2\mp XY+Y^2)$;

♦ ***разложение на множители трехчлена второй степени***:
$aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$, где x_1, x_2 – решения соответствующего ему уравнения II степени II $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$;

♦ ***комбинированные методы***.

Замечание. Формулы сокращенного умножения имеют место и для многочленов.

ПРИМЕНИМ

• Выполните действия: а) $(2X^3+X)^2$; б) $(1-5X)^3$.

Решение:

а) $(2X^3+X)^2=(2X^3)^2+2\cdot 2X^3\cdot X+X^2=\square+\square+X^2$;

б) $(1-5X)^3=\square^3-3\square+3\square-\square^3=\square-\square+\square-\square$.

• Используя изученные формулы и методы, разложите на неприводимые множители многочлен:

а) X^6-16X^4; б) $X^3-5X^2+3X-15$; в) X^4-1;
г) $64X^3+1$; д) $(6X-5)^2-(5X-4)^2$; е) $0{,}2X^2-X-10$.

Решение:

а) $X^6-16X^4=\square\cdot\square-16\cdot\square=X^4\cdot(\square-\square)$;

б) $X^3-5X^2+3X-15=\square\cdot X^2-5\cdot X^2+3X-3\cdot\square=$
$=X^2\cdot(\square-5)+\square\cdot(X-\square)=\square\cdot\square$;

в) $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$;

г) $64X^3 + 1 = (4X)^3 + 1^3 = (4X + 1)(16X^2 - 4X + 1)$;

д) $(6X - 5)^2 - (5X - 4)^2 = [(6X - 5) - (5X - 4)][(\square - \square) + (\square - \square)] = \square \cdot \square$;

е) Найдем решения уравнения $0{,}2x^2 - x - 10 = 0$, соответствующего трехчлену $0{,}2X^2 - X - 10$. Получаем $x_1 = -5$, $x_2 = 10$. Тогда $0{,}2X^2 - X - 10 = 0{,}2 \cdot \square \cdot \square$.

Итак, $0{,}2X^2 - X - 10 = 0{,}2(X + 5)(X - 10)$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Даны многочлены $P(X) = X^3 - 3X^2 + \sqrt{2}X + 1$ и $Q(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + \sqrt{5}$.

а) Перечислите коэффициенты многочленов $P(X)$ и $Q(X)$.

б) Укажите степени одночленов многочленов $P(X)$ и $Q(X)$.

в) Найдите степени многочленов $P(X)$ и $Q(X)$.

г) Вычислите значение многочлена $P(X)$ при $X = 2$.

д) Вычислите значение многочлена $Q(X)$ при $X = -2$.

2. Даны многочлены $P(X) = -X^4 - 8X^3 + X^2 - 3X$ и $Q(X) = X^3 + 5X^2$.

1) Выполните действия:

$P(X) + Q(X) = S(X)$; $P(X) - Q(X) = D(X)$; $Q(X) - P(X) = R(X)$.

Вычислите и сравните:

а) $S(3)$ с $P(3) + Q(3)$; б) $D(-1)$ с $P(-1) - Q(-1)$.

2) Укажите степени многочленов: $S(X)$, $D(X)$, $R(X)$.

3) Найдите соотношение между многочленами $D(X)$ и $R(X)$.

3. Даны многочлены $P(X) = 5X^2 - 1$; $Q(X) = 5X^2 + 1$; $R(X) = X^4 + 2X^2 + 1$.

Найдите:

а) $P(X) + Q(X) - R(X)$; б) $P(X) \cdot Q(X)$; в) $P(X) \cdot R(X)$;

г) $P(X) \cdot Q(X) - R(X)$; д) $P^2(X)$; е) $P^2(X) \cdot Q^2(X)$.

4. Дополните до квадрата двучлена:

а) $16X^2 + \ldots + 1$; б) $9X^2 - \ldots + 25$; в) $X^2 + 10X + \ldots$; г) $3X^2 - \ldots + 64$.

5. Разложите на неприводимые множители методом группировки:

а) $7X^4 - 9X^3 - 7X^2 + 9X$; б) $X^4 + X^3 - X^2 - X$; в) $X^3 - 5X^2 + 4X - 20$.

6. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

а) $25X^2 - 10X + 1$; б) $0{,}25X^2 + X + 1$; в) $X^3 - 6X^2 + 12X - 8$; г) $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.

7. Используя формулы разности квадратов, суммы и разности кубов, разложите на множители многочлен:

а) $0{,}64X^2 - 1$; б) $5X^2 - 45$; в) $125X^3 - 64$; г) $729X^3 + 1$.

8. Разложите на множители трехчлен:

а) $X^2 - 2X - 8$; б) $4X^2 - 3X - 1$; в) $-X^2 + X + 2$.

9. Даны многочлены $P(X)=2X^3-X$ и $Q(X)=X^2+1$.

а) $\operatorname{grad} P(X)>\operatorname{grad} Q(X)$.

б) $Q^2(X)=X^4+2X^2+1$.

в) $P(X)+Q(X)=2X^3+X^2-X+1$.

Формируем способности и применяем

10. Даны многочлены $P(X)=8X^3-X^2+10X-\sqrt{7}$ и $Q(X)=mX^3+kX^2+pX+n$ $(m, n, k, p\in\mathbb{R})$.

а) Найдите значения действительных параметров m, n, k, p, при которых многочлены $P(X)$ и $Q(X)$ тождественно равны.

б) Укажите степени многочленов $P(X)$, $Q(X)$.

в) При каких значениях действительных параметров m, n, k, p многочлен $Q(X)$ является нулевым?

г) Вычислите: $P(-1)$, $P(0)$, $Q(-1)$, $Q(0)$.

11. Даны многочлены $P(X)=X^5-7kX^2+2X-k$ и $Q(X)=-X^5+X^2-2X+k$.

а) Выполните действия: $S(X)=P(X)+Q(X)$, $D(X)=P(X)-Q(X)$.

б) Укажите степени многочленов $S(X)$, $D(X)$.

в) Найдите значение действительного параметра k, при котором $P(X)$ является двучленом, а $Q(X)$ – трехчленом.

г) Найдите значение действительного параметра k, при котором $S(X)$ является одночленом второй степени.

12. Используя изученные формулы, разложите на неприводимые множители многочлен:

а) $(6X+3)^2-(5X-4)^2$; б) $8X^3-(X-5)^3$; в) $125X^3+(X+1)^3$.

13. Разложите на неприводимые множители многочлен:

а) $X^3+2X^2(X-2)-8$; б) X^6-4X^3+4;

в) $X^5-X^3+5X^2+5X$; г) X^4-X^2+2X+2.

14. Разложите на множители трехчлен:

а) $8X^2+3X-0{,}5$; б) $-0{,}1X^2-X-20$; в) $X^2-\sqrt{5}X-2$.

Развиваем способности и творим

15. Дан многочлен $R(X)=aX^3+bX^2+cX+d$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

а) Найдите степень многочлена $R(X)$ в зависимости от значений параметров a, b, c, d.

б) Найдите значения параметров a, b, c, d, если: $R(0)=1$, $R(-1)=0$, $R(1)=-1$, $a=c$.

16. Дан многочлен $P(X)=aX^4+2X^2+bX-X^3+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$.

а) Найдите значения параметров a, b, c, при которых $5X^4-X^3+2X^2-8$ – стандартный вид многочлена $P(X)$.

б) Запишите в стандартном виде многочлен $Q(X)$, если известно, что $P(X)+Q(X)=0$.

17. Найдите значения действительных параметров a, b, c, d, e, при которых
$-P_1(X)\cdot P_2(X)=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$ и $P_1(X)=X^2-1$, $P_2(X)=2X^2-X+5$.

18. Найдите многочлены $P(X)$ второй степени с действительными коэффициентами такие, что $P(\alpha^3)=(P(\alpha))^3$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$.

19. Разложите на неприводимые множители многочлен:

а) X^8+3X^4-4; б) $X^{4n}-16$, $n\in\mathbb{N}^*$; в) $X^{2n+1}-X$, $n\in\mathbb{N}^*$.

§ 3. Деление многочленов

3.1. Деление многочлена на многочлен

ИССЛЕДУЕМ

• Дан многочлен $P(X)=4X^2+24X$ и одночлен $4X$.

Выполните деление $P(X):(4X)$.

Решение:

Разложив на множители многочлен $P(X)$, получим:

$$P(X)=4X^2+24X=4X\cdot(X+6).$$

Тогда $P(X):(4X)=[4X\cdot(X+6)]:(4X)=X+6.$

В таких случаях говорят, что многочлен $C(X)=X+6$ является ***частным*** от деления многочлена $P(X)=4X^2+24X$ на одночлен $4X$, поскольку $P(X)=4X\cdot C(X)$.

• Даны многочлены $P(X)=X^3-5X^2-X+5$ и $Q(X)=X^2-1$.

Выполните деление $P(X):Q(X)$.

Решение:

Разложив на множители многочлен $P(X)$, получим:

$P(X)=X^3-5X^2-X+5=X^2(X-5)-(X-5)=(X-5)(X^2-1)=(X^2-1)(X-5).$

Значит, $P(X)=Q(X)\cdot(X-5)$. Тогда $P(X):Q(X)=[Q(X)\cdot(X-5)]:Q(X)=X-5.$

Итак, многочлен $C(X)=X-5$ является *частным* от деления многочлена $P(X)=X^3-5X^2-X+5$ на многочлен $Q(X)=X^2-1$, поскольку $P(X)=Q(X)\cdot C(X)$.

Отметим, что $\operatorname{grad} C(X)=\operatorname{grad} P(X)-\operatorname{grad} Q(X)=3-2=1.$

Замечание. Многочлен $Q(X)=X^2-1$ также является *частным* от деления многочлена $P(X)=X^3-5X^2-X+5$ на многочлен $C(X)=X-5$, так как $P(X)=C(X)\cdot Q(X)$.

3.2. Теорема деления с остатком. Алгоритм деления

ИССЛЕДУЕМ

• Даны многочлены $P(X)=2X^3-3X^2+X+1$ и $Q(X)=X^2+1$.

Выясните, делится ли многочлен $P(X)$ на многочлен $Q(X)$.

Решение:

Допустим, что $P(X)$ делится на $Q(X)$, то есть существует такой многочлен $C(X)$, что

$$P(X)=Q(X)\cdot C(X). \tag{1}$$

Частное $C(X)$ является многочленом первой степени, поскольку

$$\operatorname{grad} C(X)=\operatorname{grad} P(X)-\operatorname{grad} Q(X)=3-2=1.$$

Так как многочлен первой степени $C(X)$ записывается в виде $aX+b$, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, то $P(X)=2X^3-3X^2+X+1=Q(X)\cdot(aX+b)=(X^2+1)(aX+b)=$
$=X^2\cdot aX+X^2\cdot b+aX+b=aX^3+bX^2+aX+b.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях двух тождественно равных многочленов, получим систему уравнений $a=2,\ b=-3,\ a=1,\ b=1,$ которая не имеет решений. Значит, предположение ложно, то есть не существует многочлен $C(X)$, удовлетворяющий условию (1), а потому многочлен $P(X)$ не делится на многочлен $Q(X)$.

Отметим, что $P(X)=2X^3-3X^2+X+1=2X^3+2X-3X^2-3-X+4=$
$=2X(X^2+1)-3(X^2+1)-X+4=(2X-3)(X^2+1)+(-X+4).$

В этом случае говорят, что при делении многочлена $P(X)=2X^3-3X^2+X+1$ на многочлен $Q(X)=X^2+1$ получили ***неполное частное*** $2X-3$ и ***остаток*** $-X+4$.

Степень остатка $-X+4$ равна 1 и меньше степени делителя X^2+1, которая равна 2.

• Выполните деление $(2X^3-3X^2+X+1):(X^2+1)$.

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
-\ 2X^3-3X^2+\ X+1 & X^2+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2X^3\qquad\quad +2X\ \ } & 2X-3 \\
-\ -3X^2-\ X+1 & \\
\underline{-3X^2\qquad\ -3} & \\
-\ X+4 &
\end{array}$$

Опишем ***алгоритм деления двух многочленов*** на примере данного упражнения.

✓ Делим одночлен $2X^3$ на одночлен X^2 и получаем в частном $2X$.

✓ Умножаем $2X$ на делитель X^2+1 и получаем частичное произведение $2X^3+2X$, которое вычитаем из делимого.

✓ Сносим 1 и получаем делимое $-3X^2-X+1$; делим одночлен $-3X^2$ на одночлен X^2 и получаем в частном -3.

✓ Умножаем -3 на делитель X^2+1 и вычитаем частичное произведение $-3X^2-3$ из $-3X^2-X+1$.

✓ Делимое заменяем на $-X+4$, но деление нельзя продолжить, так как одночлен X невозможно разделить на одночлен X^2. Получили неполное частное $2X-3$ и остаток $-X+4$.

Ответ: $2X^3-3X^2+X+1=(X^2+1)\cdot(2X-3)+(-X+4)$.

Замечание. Как правило, вычитание частичного произведения из делимого заменяется их сложением, при этом каждое слагаемое частичного произведения берется с противоположным знаком:

$$\begin{array}{r|l}
+\ 2X^3-3X^2+\ X+1 & X^2+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-2X^3\qquad\quad -2X\ \ } & 2X-3 \\
+\ -3X^2-\ X+1 & \\
\underline{+3X^2\qquad\ +3} & \\
-\ X+4 &
\end{array}$$

Теорема 1 (Теорема деления с остатком)

Пусть $P(X)$ и $Q(X)$, где $Q(X)\neq 0$, – многочлены с действительными коэффициентами. Тогда существуют такие многочлены $C(X)$ и $R(X)$, что:

а) $P(X)=Q(X)\cdot C(X)+R(X)$, где $R(X)=0$ или $\operatorname{grad}R(X)<\operatorname{grad}Q(X)$;

б) многочлены $C(X)$ и $R(X)$ определены однозначно.

ПРИМЕНИМ

• Выполните деление $P(X):Q(X)$, если $P(X)=X^4+3X^3-X^2+5X+2$, $Q(X)=X^2-5X-4$.

Решение:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 + & 3X^3 - & X^2 + & 5X + & 2 & X^2-5X-4 \\
\cline{7-7}
+ & -X^4 + & 5X^3 + & 4X^2 & & & X^2+\square X+4\square \\
\cline{2-4}
 & & \square X^3 + & \square X^2 + & 5X & & \\
+ & & -\square X^3 + & \square X^2 + & \square X & & \\
\cline{3-6}
 & & & \square X^2 + & \square X + & 2 & \\
+ & & & -\square X^2 + & \square X + & \square & \\
\cline{4-6}
 & & & & \square X + & \square &
\end{array}
$$

Следовательно,
$P(X)=X^4+3X^3-X^2+5X+2=(X^2-5X-4)\cdot(X^2+8X+43)+252X+174$, где неполное частное $C(X)=X^2+8X+43$, а остаток $R(X)=252X+174$.

$\operatorname{grad} Q(X)=2$, $\operatorname{grad} R(X)=1$, значит, $\operatorname{grad} R(X)<\operatorname{grad} Q(X)$.

Замечание. Если остаток $R(X)$ от деления $P(X):Q(X)$ является многочленом нулевой степени, то есть отличным от нуля числом, обозначим $R(X)=r$.

3.3. Деление многочлена на двучлен $X-\alpha$

ИССЛЕДУЕМ

• Дан многочлен $P(X)=X^2-4X+9$ и двучлен $Q(X)=X+1$.

а) Выполните деление $P(X):Q(X)$. б) Найдите $P(-1)$.

Решение:

а)
$$
\begin{array}{rrr|l}
 & X^2-4X & +9 & X+1 \\
\cline{4-4}
+ & -X^2-\;\;X & & X-5 \\
\cline{2-3}
 & -5X & +9 & \\
+ & 5X & +5 & \\
\cline{2-3}
 & & 14 &
\end{array}
$$

Итак, $C(X)=X-5$ является неполным частным, а $R(X)=14$ – остатком при делении $P(X)$ на $Q(X)$.

б) $P(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+9=14$. Отметим, что $R(X)=P(-1)=14$.

• Дан многочлен $P(X)$ и двучлен $Q(X)=X-\alpha$.

Определите, истинно ли высказывание „Остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $X-\alpha$ равен значению многочлена $P(X)$ при $X=\alpha$“.

Решение:

Разделим многочлен $P(X)$ на двучлен $X-\alpha$. Согласно теореме о делении с остатком для многочленов получаем:

а) $P(X)=(X-\alpha)C(X)+R(X)$, где $C(X)$ – частное, а $R(X)$ – остаток при делении многочлена $P(X)$ на двучлен $X-\alpha$;

б) $\operatorname{grad} R(X) < \operatorname{grad}(X-\alpha)$. Но $\operatorname{grad}(X-\alpha)=1$. Значит, $\operatorname{grad} R(X)=0$, то есть многочлен $R(X)$ – число: $R(X)=r$.

Итак, $P(X)=(X-\alpha)C(X)+r$.

При $X=\alpha$ получаем $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot C(\alpha)+r \Leftrightarrow r=R(X)=P(\alpha)$.

Следовательно, высказывание $R(X)=P(\alpha)$ истинно. Тем самым, доказана

Теорема 2 (Теорема Безу[1])

Остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $X-\alpha$ равен $P(\alpha)$ (то есть значению многочлена $P(X)$ при $X=\alpha$).

ПРИМЕНИМ

• Найдите остаток от деления многочлена $P(X)=X^4+mX^2+mX-1$ на двучлен $X-m$, если известно, что остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $X-1$ равен –6.

Решение:

Из условия $P(1)=-6$ (согласно теореме Безу) следует, что:

$1^4+m\cdot 1^2+m\cdot 1-1=-6 \Leftrightarrow 2m=-6 \Leftrightarrow m=-3$.

Следовательно, $P(X)=X^4-3X^2-3X-1$.

Остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $X+3$, согласно теореме Безу, равен $P(-3)=(-3)^4-3\cdot(-3)^2-3\cdot(-3)-1=62$.

Ответ: $r=62$.

Замечание. Многочлен $P(X)$ делится без остатка (нацело) на двучлен $X-\alpha$, если $P(\alpha)=0$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Определите, истинно ли высказывание $P(X)=Q(X)\cdot C(X)+R(X)$, где:

а) $P(X)=X^2-7X-13$, $Q(X)=X-4$, $C(X)=X+3$, $R(X)=-1$.

б) $P(X)=X^3-10X^2-X-10$, $Q(X)=X^2-1$, $C(X)=X+10$, $R(X)=3$.

в) $P(X)=2X^4+X^3+2X+1$, $Q(X)=2X^2+1$, $C(X)=X^2-X$, $R(X)=X+3$.

2. Дан многочлен $P(X)=X^3+X^2-5X-5$.

Выполните деление:

а) $P(X):(X-1)$ и сравните остаток с $P(1)$;

б) $P(X):(X+1)$ и сравните остаток с $P(-1)$;

в) $P(X):X$ и сравните остаток с $P(0)$;

г) $P(X):(2X+1)$ и сравните остаток с $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

---

1) Этьенн Безу (1730–1783) – французский математик.

3. Применяя теорему Безу, найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)$, если:

а) $P(X)=X^2+2X+1,\ Q(X)=X+1;$ б) $P(X)=-3X^2+X,\ Q(X)=X-5;$

в) $P(X)=8X+2,\ Q(X)=X+3;$ г) $P(X)=3X^3-X+81,\ Q(X)=X-3;$

д) $P(X)=-2X^4+X^3+X^2+2,\ Q(X)=X+1;$ е) $P(X)=X^3+X^2-X+8,\ Q(X)=X+2.$

Формируем способности и применяем

4. Выполните деление $P(X):Q(X)$, если:

а) $P(X)=X^3-3X^2+X-9,\ Q(X)=X^2;$

б) $P(X)=2X^3-X^2+4,\ Q(X)=X^3-X;$

в) $P(X)=-5X^3+X^2-X+4,\ Q(X)=X^3+1;$

г) $P(X)=X^5-X^3+X,\ Q(X)=X^2-1;$

д) $P(X)=2X^3+X^2+5X+60,\ Q(X)=X+3.$

5. Найдите неполное частное и остаток при делении многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)$, если:

а) $P(X)=X^4+X^3+X^2+X,\ Q(X)=X+2;$

б) $P(X)=-5X^4-X^3+X^2-2X-6,\ Q(X)=X-1;$

в) $P(X)=2X^5-3X^4+4X^3+X^2+2,\ Q(X)=X-4;$

г) $P(X)=X^8+2X^4+1,\ Q(X)=X+1;$

д) $P(X)=X^4+X^3+X+1,\ Q(X)=X-3;$

е) $P(X)=X^6-125,\ Q(X)=X-\sqrt{5}.$

Развиваем способности и творим

6. Найдите значения действительных параметров a, b, если известно, что существует двучлен $P(X)$ такой, что:

$(X^3-aX^2-bX+1):P(X)=X^2-X+1.$

7. Найдите многочлен $P(X)$, если одновременно выполнены условия:

а) остаток от деления $P(X)$ на $Q(X)=X^3-2$ равен квадрату частного этих многочленов;

б) $P(-2)+P(2)+34=0.$

8. Найдите значения действительного параметра a, при которых r является остатком от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)$:

а) $P(X)=X^3+a^2X^2+3aX+1,\ Q(X)=X-1,\ r=12;$

б) $P(X)=X^3+a^2X^2+3aX+1,\ Q(X)=X-1,\ r=6;$

в) $P(X)=aX^3+a^2X^2+3a+1,\ Q(X)=X+1,\ r=0.$

• ***Задача для чемпионов***

9. При делении многочлена $P(X)=X^3-aX^2+bX-1$ поочередно на $Q_1(X)=X,\ Q_2(X)=X+1,\ Q_3(X)=X-2$ получается один и тот же остаток. Найдите остаток от деления $P(X)$ на $Q(X)=X^2-3.$

§ 4. Корни многочленов

ИССЛЕДУЕМ

• Дан многочлен $P(X)=X^3-5X^2+4X$. Найдите действительные числа α, при которых $P(\alpha)=0$.

Решение:

Решаем уравнение $x^3-5x^2+4x=0$, ***соответствующее*** многочлену $P(X)$. Его решениями являются $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=4$. (Проверьте!)

Тогда $P(0)=0$, $P(1)=0$, $P(4)=0$. Числа 0, 1, 4 являются корнями многочлена $P(X)$.

Определение

Действительное число α называется **корнем** многочлена $P(X)$, если значение многочлена $P(X)$ при $X=\alpha$ равно нулю, т. е. $P(\alpha)=0$.

Замечание. Чтобы найти ***корни многочлена***, надо найти ***решения соответствующего ему уравнения***.

ПРИМЕНИМ

• Найдите корни многочлена $P(X)=X^3-3X-2$.

Решение:

Решим уравнение $x^3-3x-2=0$, соответствующее многочлену $P(X)=X^3-3X-2$.

Получаем $x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow (x^3-4x)+(x-2)=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)+(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)[x(x+2)+1]=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=2$ или $x=-1$. Следовательно, корнями многочлена $P(X)$ являются 2 и –1.

Корень $\alpha=2$ является *простым корнем*, а корень $\alpha=-1$ – *двойным корнем* многочлена $P(X)=X^3-3X-2=(X-2)(X+1)^2$.

Определение

Действительное число α называется **корнем кратности** m, $m\in\mathbb{N}^*$, многочлена $P(X)$, если $P(X)$ делится на $(X-\alpha)^m$ и не делится на $(X-\alpha)^{m+1}$.

• Если $m=1$, то α называется ***простым корнем*** многочлена $P(X)$.
• При $m=2$ или $m=3$ говорят о ***двойном*** или ***тройном корне*** соответственно.

Пример

Число $\alpha=-2$ – тройной корень многочлена $Q(X)=(X+2)^3(X+\sqrt{5})$, так как $Q(X)$ делится на $(X+2)^3$, но не делится на $(X+2)^4$.

Теорема 3

Пусть $P(X)$ – ненулевой многочлен. Действительное число α является корнем многочлена $P(X)$ тогда и только тогда, когда $P(X)$ делится нацело на бином $X-\alpha$.

Доказательство

Пусть α – корень многочлена $P(X)$, то есть $P(\alpha)=0$. Тогда, согласно теореме о делении с остатком для многочленов, следует, что остаток от деления $P(X)$ на $X-\alpha$ равен нулю. Значит, многочлен $P(X)$ делится без остатка на двучлен $X-\alpha$.

Обратно, пусть многочлен $P(X)$ делится без остатка на двучлен $X-\alpha$. Тогда существует такой многочлен $C(X)$, что $P(X)=(X-\alpha)\cdot C(X)$ и $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)C(\alpha)=0$. Значит, $P(\alpha)=0$, то есть α является корнем многочлена $P(X)$. ▶

ПРИМЕНИМ

• Даны многочлены $P(X)=3X^2-X-2$ и $Q(X)=X-1$.

Определите, делится ли многочлен $P(X)$ на двучлен $Q(X)$.

Решение:

Действительное число 1 является корнем многочлена $P(X)$. Так как $P(1)=0$, то в силу теоремы 3 многочлен $P(X)$ делится нацело на двучлен $Q(X)=X-1$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Какие из чисел –1; –0,5; 0; 2; 5 являются корнями многочлена:

а) $P(X)=-3X^2-X^2+2$; б) $Q(X)=5X^5-3X^3+2X^2$;

в) $R(X)=(X-5)(X-0{,}5)(X-2)$; г) $H(X)=X^4-1$?

2. Составьте многочлен второй степени по его корням:

а) $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{3}{4}$; б) $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$; в) -1 и 5.

3. *Истинно* или *Ложно*?

а) $\alpha=-2$ является корнем многочлена $P(X)=X^5-X^4+8X$.

б) $\alpha=-3$ является корнем многочлена $Q(X)=-X^3+6X^2-81$.

в) $\alpha=0$ является корнем многочлена $H(X)=X^{20}-X^{10}+X-1$.

г) $\alpha=\frac{1}{2}$ является корнем многочлена $R(X)=2X^4+3X^2-X+5$.

4. Даны многочлены:

а) $P(X)=3X^2-X-2$ и $Q(X)=X-1$; б) $P(X)=X^5-X^2+X$ и $Q(X)=X$;

в) $P(X)=-0{,}2X^3-X^2+4$ и $Q(X)=X+3$.

Делится ли нацело многочлен $P(X)$ на многочлен $Q(X)$?

Формируем способности и применяем

5. Дополните такими действительными числами, чтобы полученный многочлен:

1) имел два простых корня;

2) имел действительный корень кратности два;

3) не имел действительных корней.

а) $P(X)=4X^2-4X+\square$; б) $P(X)=\square X^2-10X+25$;

в) $P(X)=3X^2+\square X+1$; г) $P(X)=X^2-\square X-\square$.

6. Найдите действительные корни многочлена:

а) $P(X)=3X^4-X^2-2$; б) $P(X)=X^3-5X^2+6X$;

в) $P(X)=27X^3-1$; г) $P(X)=16X^4-64$.

7. а) Составьте многочлен второй степени, который имел бы двойной корень;

б) составьте многочлен третьей степени, который имел бы тройной корень;

в) составьте многочлен третьей степени, который имел бы простой корень и двойной корень.

8. Даны многочлены: а) $P(X)=X^3-X^2-X-1$ и $Q(X)=X+1$;

б) $P(X)=X^3-X^2-X-1$ и $Q(X)=X-1$;

в) $P(X)=X^4-3X^3-X^2+9$ и $Q(X)=X-3$.

Выясните, делится ли без остатка многочлен $P(X)$ на двучлен $Q(X)$.

9. Найдите, какова кратность корня $\alpha=-5$ многочлена:

а) $P(X)=X^2+10X+25$; б) $P(X)=X^3+15X^2+75X+125$; в) $P(X)=X^4-625$.

Развиваем способности и творим

10. Дан многочлен $P(X)=(3a+b)X^2+6X(a-b)+11$.

а) Найдите действительные числа a и b, при которых $P(X)=-2X^2-5X+11$.

б) Найдите корни многочлена $P(X)$.

11. Найдите действительные коэффициенты a и b, если известно, что многочлен $P(X)=X^4-5X^3+8X^2+aX+b$ делится без остатка на многочлен $Q(X)=(X-1)^2$.

• ***Задача для чемпионов***

12. Дан многочлен $P(X)=X^4+aX^3+bX+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$. Докажите, что не существует действительных чисел a, b, c, при которых многочлен $P(X)$ делится без остатка на многочлен $Q(X)=X^3-X$.

§ 5. Действия с алгебраическими дробями. Повторение и дополнение

5.1. Понятие алгебраической дроби

ИССЛЕДУЕМ

• Дана алгебраическая дробь $\dfrac{X^3(1+X)}{(X+1)^2(4X-X^3)}$.

а) Найдите на множестве $\mathbb{R}$ область допустимых значений алгебраической дроби.

б) Найдите значение алгебраической дроби при $X=\sqrt{3}$.

Решение:

а) Найдем корни многочлена – знаменателя алгебраической дроби, решив соответствующее уравнение:

$(x+1)^2(4x-x^3)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(4-x^2)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(2-x)(2+x)=0.$

Многочлен – знаменатель алгебраической дроби имеет корни $-2,\ -1,\ 0,\ 2$. Следовательно, ОДЗ исходной дроби является множество $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,2\}$.

б) Подставив в алгебраическую дробь $X=\sqrt{3}$, получим:

$$\frac{(\sqrt{3})^3(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)^2[4\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3]}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{3}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=1{,}5(\sqrt{3}-1).$$

Определение

Отношение двух многочленов называется **алгебраической дробью**, или **рациональной дробью**.

Областью допустимых значений (ОДЗ) рациональной дроби от одной переменной на заданном множестве ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) является подмножество данного множества, на котором знаменатель дроби не обращается в нуль.

Значение алгебраической дроби для x_0 равно отношению значений ее числителя и знаменателя при $X=x_0$.

5.2. Действия с алгебраическими дробями

5.2.1. Основное свойство алгебраической дроби

ИССЛЕДУЕМ

• Даны многочлены $P(X)=X(1-X^2)$ и $Q(X)=(X+1)(X-4X^3)$.

а) Напишите алгебраическую дробь $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

б) Найдите ОДЗ алгебраической дроби $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

в) Упростите $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ так, чтобы получить несократимую дробь вида $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

г) Найдите ОДЗ алгебраической дроби $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

д) Сравните ОДЗ алгебраических дробей $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ и $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

е) Умножьте на ОДЗ числитель и знаменатель алгебраической дроби $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ на многочлен $R(X)=X^3+1$.

Решение:

а) $\dfrac{P(X)}{Q(X)}=\dfrac{X(1-X^2)}{(X+1)(X-4X^3)}$.

б) $(x+1)(x-4x^3)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ или $x(1-4x^2)=0$. Решениями этих уравнений являются $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-0{,}5$, $x_4=0{,}5$. (Проверьте!)

Значит, ОДЗ дроби, полученной в пункте а), является множество $\mathbb{R}\setminus\{-1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5\}$.

в) $\dfrac{P(X)}{Q(X)}=\dfrac{X(1-X)(1+X)}{X(X+1)(1-4X^2)}\overset{(X(X+1)}{=}\dfrac{-(X-1)}{1-4X^2}=\dfrac{X-1}{4X^2-1}=\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

г) $4x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-0{,}5$ или $x=0{,}5$. ОДЗ дроби $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ является $\mathbb{R}\setminus\{-0{,}5;\ 0{,}5\}$.

д) ОДЗ дроби $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ является множество $\mathbb{R}\setminus\{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5\}$, а ОДЗ дроби $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ – множество $\mathbb{R}\setminus\{-0{,}5; 0{,}5\}$. Итак, ОДЗ алгебраических дробей $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ и $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ различны.

е) $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}\cdot\dfrac{R(X)}{R(X)} = {}^{X^3+1)}\dfrac{X-1}{4X^2-1} = \dfrac{(X-1)(X^3+1)}{(4X^2-1)(X^3+1)} = \dfrac{X^4-X^3+X-1}{4X^5-X^3+4X^2-1}$.

При ***умножении*** (***делении***) числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же многочлен степени, большей или равной 1, получаем новую алгебраическую дробь, равную исходной на ОДЗ обеих алгебраических дробей. Это свойство называется ***основным свойством алгебраической дроби***.
Деление числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же многочлен степени, большей или равной 1, называется ***сокращением алгебраической дроби***.

Определения

- Алгебраическая дробь, которую можно сократить, называется **сократимой**.
- Алгебраическая дробь, которую невозможно сократить, называется **несократимой**.

ПРИМЕНИМ

Сократите алгебраическую дробь $\dfrac{1-X^3}{X^3+X^2+X}$.

Решение:

ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\dfrac{1-X^3}{X^3+X^2+X} = \dfrac{1-X^3}{X(X^2+X+1)} = \dfrac{(1-X)(X^2+X+1)}{X(X^2+X+1)} = \dfrac{1-X}{X}$.

Ответ: $\dfrac{1-X^3}{X^3+X^2+X} = \dfrac{1-X}{X}$.

5.2.2. Сложение алгебраических дробей

ИССЛЕДУЕМ

• Выполните на ОДЗ действия: а) $\dfrac{X}{X^2-4}+\dfrac{2}{4-X^2}$; б) $\dfrac{1}{3X+1}+\dfrac{1}{9X^2-3X+1}$.

Решение:

а) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

$$\frac{X}{X^2-4}+\frac{2}{4-X^2} = \frac{X}{X^2-4}+\frac{2}{-(X^2-4)} = \frac{X}{X^2-4}-\frac{2}{X^2-4} = \frac{X-2}{X^2-4}^{\,(X-2} = \frac{1}{X+2}.$$

б) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$. $\dfrac{1}{3X+1}+\dfrac{1}{9X^2-3X+1} = \dfrac{9X^2-3X+1+3X+1}{(3X+1)(9X^2-3X+1)} = \dfrac{9X^2+2}{27X^3+1}$.

Результатом сложения двух алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями является алгебраическая дробь, знаменатель которой равен знаменателю исходных дробей, а ее числитель равен алгебраической сумме числителей исходных дробей.

Чтобы сложить на ОДЗ две алгебраические дроби с различными знаменателями, надо привести дроби к общему знаменателю, затем сложить результаты, соблюдая правило сложения дробей с равными знаменателями.
Если результатом сложения алгебраических дробей является сократимая алгебраическая дробь, то ее сокращают до несократимой дроби.

5.2.3. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраических дробей в степень с целым показателем

ИССЛЕДУЕМ

• 1) Упростите:

а) $\dfrac{X+3}{X^2+6X+9}\cdot\dfrac{X^2-9}{27-X^3}$; б) $\dfrac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3}:\dfrac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}$; в) $\left(\dfrac{X-1}{X^2}\right)^3$.

2) Сравните область допустимых значений исходного выражения с областью допустимых значений полученного результата.

Решение:

1) а) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$.

$$\frac{X+3}{(X+3)^2}\cdot\frac{(X-3)(X+3)}{(3-X)(9+3X+X^2)}=\frac{(X+3)^2(X-3)}{(X+3)^2(3-X)(X^2+3X+9)}^{((X+3)^2(3-X)}=$$

$$=-\frac{1}{X^2+3X+9}.$$ ОДЗ произведения является $\mathbb{R}$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}\}$.

$$\frac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3}:\frac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}=\frac{X^3-(\sqrt{2})^3}{X^2-\sqrt{3}X+3}\cdot\frac{X^3+(\sqrt{3})^3}{X^2+\sqrt{2}X+2}=$$

$$=\frac{(X-\sqrt{2})(X^2+\sqrt{2}X+2)(X+\sqrt{3})(X^2-\sqrt{3}X+3)}{(X^2+\sqrt{2}X+2)(X^2-\sqrt{3}X+3)}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})=$$

$=X^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})X-\sqrt{6}$. ОДЗ частного является $\mathbb{R}$.

в) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\left(\dfrac{X-1}{X^2}\right)^3=\dfrac{(X-1)^3}{(X^2)^3}=\dfrac{X^2-3X^2+3X-1}{X^6}$. ОДЗ полученного результата является $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Область допустимых значений исходного выражения отличается от области допустимых значений полученного результата в пунктах а), б) и не отличается в пункте в).

При умножении двух алгебраических дробей перемножаются их числители и знаменатели.
При делении двух алгебраических дробей умножается делимое на обратное делителю.
Так как результатом умножения алгебраических дробей, как правило, является несократимая дробь, возможно отличие областей допустимых значений исходного выражения и полученной дроби.

Замечание. Возведение алгебраических дробей в степень с целым показателем выполняется так же, как и возведение рациональных чисел, представленных буквенными выражениями, в степень с целым показателем.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Найдите ОДЗ пары алгебраических дробей:

а) $\dfrac{X+5}{4}$ и $\dfrac{X-6}{2}$; б) $\dfrac{1}{X-3}$ и $\dfrac{X}{X+3}$; в) $\dfrac{X-4}{3X+6}$ и $\dfrac{3X-1}{X^2+2X}$.

2. Запишите каждую сумму двух алгебраических дробей задания **1** в виде несократимой дроби.

3. Найдите ОДЗ несократимых дробей, полученных в задании **2**.

4. Найдите значение дроби, полученной в результате сложения дробей из задания **1** пункт в), при:

а) $X=-1$; б) $X=0{,}25$; в) $X=2$.

Формируем способности и применяем

5. Выполните на ОДЗ действия:

а) $\dfrac{X+3}{X^2+2X}+\dfrac{X-3}{4-X^2}$; б) $\dfrac{(X+4)^2}{X^2+4X}+\dfrac{(X-4)^2}{X^2-4X}$; в) $\dfrac{3-X^2}{9-X^2}+\dfrac{X+3}{X-3}$;

г) $\dfrac{-125}{X^2-5X}+\dfrac{X^2}{X-5}$; д) $\dfrac{X^3}{X^2-64}-\dfrac{X}{X-8}+\dfrac{2}{X+8}$; е) $\left(\dfrac{1}{X-1}\right)^{-1}+\dfrac{X}{X+1}-\dfrac{X+2}{X^2-1}$.

6. Запишите в виде несократимой алгебраической дроби на ОДЗ:

а) $\dfrac{2X-6}{X^2}\cdot\dfrac{X^3}{X-3}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}X^2}{2X-2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}X-2}{3X^3}$; в) $\dfrac{X^2-100}{2X^5}\cdot\dfrac{-X^2}{X-10}$;

г) $(X^2-4):\dfrac{(X+2)^2}{X-2}$; д) $\dfrac{(Y-5)^2}{3Y+18}:\dfrac{3Y^2-75}{Y^2-36}$; е) $\left(\dfrac{X^2-4}{X}\right)^{-2}:\dfrac{X^2+1}{X-2}$.

Развиваем способности и творим

7. Упростите на ОДЗ:

а) $\left(X-\dfrac{3}{X-1}\right)\cdot\left(\dfrac{2(1-X)}{6+2X-2X^2}\right)$;

б) $(X^2-3X+2)X\cdot\left(\dfrac{3X}{X-2}-\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X^2-3X+2}\right)$;

в) $\left(\dfrac{8X^3+1}{8X^2+1}\right)^{-1}\cdot\dfrac{4X^2-2X+1}{4X^2-1}\cdot(1-2X)^2$;

г) $\dfrac{4X^2-1}{8X^3+1}:\left(\dfrac{4X^2-4X+1}{4X^2-2X+1}\cdot\dfrac{1}{2X+1}\right)$.

8. Дано выражение $E(X)=\dfrac{X^2+3X+2}{X-2}$.

а) Запишите выражение в виде $E(X)=aX+b+\dfrac{c}{X-2}$, где $a,b,c\in\mathbb{R}$. Найдите коэффициенты a, b, c.

б) Найдите $a\in\mathbb{Z}$, при котором $E(a)\in\mathbb{Z}$.

Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

1. Приведите к стандартному виду многочлен и укажите его степень:

а) $P(X)=6X^2-3-7X^3-2X^2+3$; б) $Q(Y)=7Y^3-8-6Y^2+3Y+4Y^2-7Y^3+20$.

2. Запишите в стандартном виде сумму, разность и произведение многочленов $P(X)$ и $Q(X)$:

а) $P(X)=3X^2$; $Q(X)=2X^2-10X+4$; б) $P(X)=-X^2-1$; $Q(X)=-3X^3+6X+2$.

3. Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(3X+2)^3$; б) $(-\sqrt{3}+Y)^3$; в) $(3Y-1)(9Y^2+3Y+1)$; г) $(3X+1)(9X^2-3X+1)$.

4. Какие из элементов множества $\{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$ являются корнями многочлена:

а) $P(X)=X^3-25X$; б) $P(X)=X^3-2X^2-X-2$; в) $P(X)=X^3-4X^2+3X$?

Формируем способности и применяем

5. Разложите на множители многочлен:

а) $4X^2+4X+1$; б) $Z^2-Z+0{,}25$; в) $9X^2+42X+49$; г) $9X^2-6X+1$.

6. Используя изученные формулы, разложите на неприводимые множители:

а) $16Y^2-25(Y+4)^2$; б) $(2X-9)^2-81$; в) $64X^3+1$; г) Z^6-125.

7. Разложите методом группировки на неприводимые множители многочлен:

а) $X^2-5X+X-5$; б) $2Y^3-4Y^2+Y-2$; в) X^3-X^2-8X+8; г) $X^3+X^2+\sqrt{3}X+\sqrt{3}$.

8. Найдите неполное частное и остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)$:

а) $P(X)=X^2+X-20$, $Q(X)=X-4$; б) $P(X)=6X^3+X^2-29X+20$, $Q(X)=2X-3$.

9. Применяя теорему Безу, найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)=X-\alpha$, если:

а) $P(X)=2X^3+4X+1$, $\alpha=1$; б) $P(X)=-3X^4-5X^2+6X-21$, $\alpha=-2$.

10. Выясните, делится ли без остатка многочлен $P(X)$ на многочлен $Q(X)$:

а) $P(X)=X^4-64$, $Q(X)=X+4$; б) $P(X)=2X^3-5X+1$, $Q(X)=(X-3)(X+1)$.

Развиваем способности и творим

11. Найдите значение действительного параметра a, при котором многочлен $P(X)$ делится без остатка на многочлен $Q(X)$:

а) $P(X)=2X^3-5X^2+aX+a$, $Q(X)=X-3$;

б) $P(X)=aX^3+3X^2+(a-1)X-2$, $Q(X)=(X-2)(X+2)$.

12. Выполните на ОДЗ действия $\left(\dfrac{1}{X^2-3X}+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X-3}\right)^{-3}$.

13. Пусть x_1 и x_2 – корни многочлена $P(X)=2X^2-3X-5$. Найдите:

а) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

14. Запишите в стандартном виде многочлен $Q(X)$, корни которого равны обратным значениям корней многочлена $P(X)=3X^2+X-15$.

• *Задача для чемпионов*

15. Пусть $P(X)$ – многочлен степени не более 2 с действительными коэффициентами такой, что $P(\alpha)=0$ для $\alpha\in\{1, 2, 3\}$. Докажите, что $P(X)$ – нулевой многочлен.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Дан многочлен

$P(X)=5X^2-(X^4-4X^2-X)-1.$

а) Запишите многочлен в стандартном виде. **2 б**

б) Дополните: **1 б**

$$\operatorname{grad} P(X)=\square.$$

в) Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)=X-1$ без выполнения деления. **2 б**

г) Найдите корни многочлена $P(X)-Q(X)$. **5 б**

д) Найдите $C(X)$ и $R(X)$ такие, чтобы $P(X)=(X^2-1)\cdot C(X)+R(X)$. **6 б**

2. Дано выражение $E(X)=\dfrac{4}{X^2+8}-\dfrac{3}{X^2+5}$.

а) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если высказывание ложно: **1 б**

„ОДЗ выражения $E(X)$ является множество $\mathbb{R}$“.

И **Л**

б) Найдите действительные значения X, при которых $E(X)\neq 0$. **4 б**

в) Упростите выражение: **4 б**

$$E(X):(2X^2+16)^{-1}.$$

г) Найдите $E(\alpha)$, если α является положительным корнем многочлена $P(X)=X(X^2-4)$. **5 б**

II вариант

1. Дан многочлен

$P(X)=3X^2-(X^3+X^2-X)+1.$

а) Запишите многочлен в стандартном виде.

б) Дополните:

$$\operatorname{grad} P(X)=\square.$$

в) Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)=X+1$ без выполнения деления.

г) Найдите корни многочлена $P(X)-Q(X)$.

д) Найдите $C(X)$ и $R(X)$ такие, чтобы $P(X)=(X^2+1)\cdot C(X)+R(X)$.

2. Дано выражение $E(X)=\dfrac{5}{X^2+6}-\dfrac{4}{X^2-5}$.

а) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если высказывание ложно:

„ОДЗ выражения $E(X)$ является множество $\mathbb{R}$“.

И **Л**

б) Найдите действительные значения X, при которых $E(X)\neq 0$.

в) Упростите выражение:

$$E(X):(2X^2+12)^{-1}.$$

г) Найдите $E(\alpha)$, если α является отрицательным корнем многочлена $P(X)=X(X^2-9)$.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	30–29	28–26	25–23	22–18	17–14	13–9	8–7	6–5	4–3	2–0

Глава

4 Уравнения. Системы уравнений

§ 1. Уравнения вида $ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R}$. Повторение и дополнение

1.1. Понятие уравнения с одним неизвестным

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x - 3 = 5$; б) $x^2 + 8 = 0$; в) $0{,}25x(8x+4) + 5 = 2(x^2 + 0{,}5x + 2) + 1$.

Решение:

а) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.\ S = \{4\}$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -8.\ S = \varnothing$.

в) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $0{,}25x(8x+4) + 5 = 2(x^2 + 0{,}5x + 2) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \square = \square \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.\ S = \mathbb{R}$.

• Даны уравнения $2(x-3)(x+1) = 0$ и $2x^2 - 4x - 6 = 0$.

Равносильны ли эти уравнения?

Решение:

ОДЗ обоих уравнений является множество $\mathbb{R}$.

$2(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ или $x = -1.\ S_1 = \{-1, 3\}$.

Множеством решений уравнения $2x^2 - 4x - 6 = 0$ является множество $S_2 = \{-1, 3\}$.

Следовательно, $2(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$, поскольку множества их решений равны: $S_1 = S_2 = \{-1, 3\}$.

Определение

Равенство вида $A(x) = B(x)$, где $A(x)$, $B(x)$ – выражения от x, называется **уравнением с одним неизвестным** x.

Замечание. Уравнения могут быть с несколькими неизвестными. Например, $5x - 3y = 3$ – уравнение с двумя неизвестными, $3u + 2v - 5t = 0$ – уравнение с тремя неизвестными.

Определение

Значение неизвестного, обращающее уравнение в истинное высказывание, называется **решением** уравнения.

Решить уравнение – значит найти множество его решений.

Множество решений уравнения обозначается буквой S.

Уравнение может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.

Замечание. Как правило, уравнение начинают решать с нахождения его области допустимых значений.

Определение

Множество значений неизвестного (неизвестных), при которых имеют смысл все выражения уравнения, называется **областью допустимых значений** (ОДЗ) этого уравнения.

Определение

Два уравнения с одним неизвестным (с одними и теми же неизвестными) называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между двумя равносильными уравнениями ставится символ „$\Leftrightarrow$“.

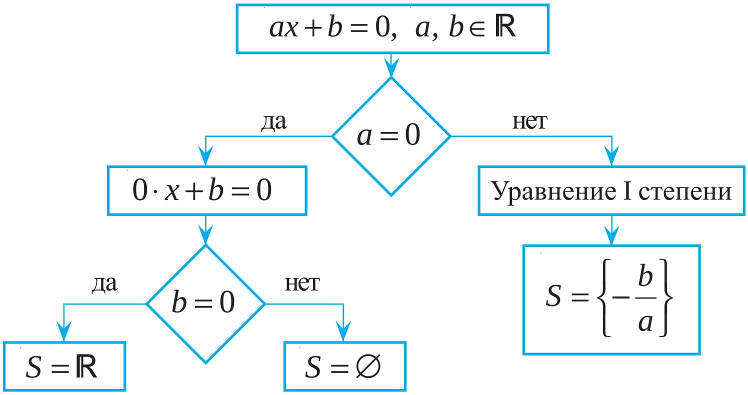
Замечание. Равносильные уравнения, которые решаются на некотором множестве (как правило, на ОДЗ исходного уравнения), называются ***равносильными на этом множестве***.

1.2. Уравнения I степени с одним неизвестным

• Используя следующие отношения равносильности, основанные на свойствах отношения равенства на множестве действительных чисел, получаем равносильные уравнения:

1. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow B(x)=A(x)$.
2. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\pm C(x)=B(x)\pm C(x)$, где выражение $C(x)$ имеет смысл для любого $x\in$ ОДЗ исходного уравнения.
3. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\cdot C(x)=B(x)\cdot C(x)$, где выражение $C(x)$ имеет смысл и $C(x)\neq 0$ для любого $x\in$ ОДЗ исходного уравнения.
4. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow \dfrac{A(x)}{C(x)}=\dfrac{B(x)}{C(x)}$, где выражение $C(x)$ имеет смысл и $C(x)\neq 0$ для любого $x\in$ ОДЗ исходного уравнения.

Схема (алгоритм) решения уравнения вида $\boldsymbol{ax+b=0,\ a, b\in \mathbb{R}}$



Определения

- Уравнение вида $ax+b=0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **уравнением I степени с одним неизвестным**.
- Числа a, b называются **коэффициентами уравнения**.

Уравнения I степени с одним неизвестным имеет ***единственное решение***: $-\dfrac{b}{a}$. Следовательно, $S=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

1.3. Уравнения, приводимые к уравнению I степени с одним неизвестным

Некоторые уравнения могут быть приведены к уравнению I степени с одним неизвестным с помощью подстановок или при помощи отношений равносильности.

Пример

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $x^2-2x+3=x(x+2)-5$; б) $\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{5x}{x+3}-9$.

Решение:

а) ОДЗ: $\quad\quad$.

$x^2-2x+3=x(x+2)-5 \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$ раскрываем скобки

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=x^2+2x-5 \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$ применяем отношение равносильности 2

$\Leftrightarrow -4x=-8 \,|:(-4) \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$ применяем отношение равносильности 4

$\Leftrightarrow x=2$.

Ответ: $S=$ $\quad\quad$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Обозначив $\dfrac{x}{x+3}=t$, получим уравнение I степени $2t=5t-9 \Leftrightarrow 3t-9=0$ с неизвестным t, имеющее решение 3. Тогда на ОДЗ имеем: $\dfrac{x}{x+3}=3 \Leftrightarrow x=3(x+3) \Leftrightarrow x=-4{,}5$; $-4{,}5 \in$ ОДЗ.

Ответ: $S=\{-4{,}5\}$.

1.4. Уравнения I степени с одним неизвестным с параметром (дополнительно)

Уравнения I степени с одним неизвестным могут содержать *параметр*. В таких случаях необходимо исследовать решения уравнения в зависимости от значений параметра.

Пример

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $mx-3=2x+5m$, где $m \in \mathbb{R}$.

Решение:

ОДЗ: $\mathbb{R}$. $mx-3=2x+5m \Leftrightarrow x(m-2)=5m+3 \Leftrightarrow (m-2)x=5m+3$.

- Если $m=2$, то получим уравнение $0\cdot x=13$, которое не имеет решений.
- Если $m \neq 2$ $(m \in \mathbb{R}\setminus\{2\})$, то получим решение $x=\dfrac{5m+3}{m-2}$.

Ответ: При $m=2$, $S=\varnothing$; при $m \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $S=\left\{\dfrac{5m+3}{m-2}\right\}$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Назовите уравнения I степени:

а) $2x-1=0$; б) $3(x-1)=5$; в) $\frac{1}{x-1}=2$; г) $x^2-x=0$;

д) $3x=0$; е) $6x=-4$; ж) $2x+\frac{1}{x}+3=0$; з) $-\sqrt{5}x+2{,}5=0$.

2. Какой элемент множества $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1{,}5;\ 5\}$ является решением уравнения:

а) $3x-2=x-6$; б) $\frac{x+1}{x}=1$; в) $(x+2)(x-5)=0$;

г) $x(x+1{,}5)=0$; д) $\frac{2x-1}{x-2}=2$; е) $x(x+1{,}5)(x-5)=0$?

3. Найдите ОДЗ уравнения:

а) $2(x-5)-4=5x+1$; б) $\frac{3}{x-5}=4$; в) $x(x+3)=0$.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x-1=0$; б) $-\frac{3}{4}x=\frac{1}{5}$; в) $0{,}5x+4=0$;

г) $3-2x=0$; д) $1{,}4+2x=0$; е) $-\frac{5}{7}x-\frac{1}{3}=0$.

5. Найдите нуль функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=3x-1$; б) $f(x)=2-6x$; в) $f(x)=-\sqrt{19}x$; г) $f(x)=\sqrt{5}x-2\sqrt{5}$.

6. Найдите корень многочлена:

а) $P(X)=3X-0{,}5$; б) $P(X)=-8X+\sqrt{8}$; в) $P(X)=-0{,}3X-2{,}8$.

Формируем способности и применяем

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2(x-1)+3(x+2)=5x+4$; б) $6-3(2-x)+4x=7-x$;

в) $-1{,}4(5-x)+2{,}5(2+x)=-3{,}6+x$; г) $5+7(1-x)-5x=x-8$.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ методом подстановки уравнение:

а) $\frac{4}{x-5}=7-\frac{3}{x-5}$; б) $-\frac{3(x+2)}{x}=\frac{2(x+2)}{x}+5$;

в) $\frac{5t}{t+1}=-\frac{1}{2}+\frac{3t}{t+1}$; г) $\frac{0{,}5a+1{,}5}{2a}=9-\frac{a+3}{a}$.

9. Дополните так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $3(x-1)-2x=4 \Leftrightarrow 2x+5=\square-x$; б) $4x+2(1-x)=\square \Leftrightarrow x-3(x+4)=5-2x$.

10. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$-3(1-z)=4z-8$	30	$2z-3(4-z)=12+z$
$2,(5)t-\frac{2}{3}(t+1)=0$	?	$\frac{2}{9}(2-t)-4,(6)t=6$

11. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$2(5-3x)+4x=7-x$	81	$8-(3-4x)-x=17$
$9\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)-5x=8$	?	$14-2(x+5)+3x=6$

12. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения и найдите зашифрованное слово.

Уравнение	Р	А	Б	О	В
$3x-5=10$	-5	$\frac{5}{3}$	5	3	$-\frac{5}{3}$
$-x+6{,}5=x+0{,}5$	3	7	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$12-x=3(x-4)$	0	6	12	-6	-3
$\sqrt{3}\cdot x=0$	$-\sqrt{3}$	2	1	$\sqrt{3}$	0
$x^2-2=x(x-0{,}2)$	2	$0{,}2$	-10	10	1

Развиваем способности и творим

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(3x-1)^2-4(5x+6)=9(x^2-x+1)+2$; б) $\frac{1}{2}(1-5x)+4(x^2-4)-\frac{3}{4}=\frac{5}{8}(2-x)+4x^2-3x$;

в) $2x^3-x+3=5(x+\frac{2}{5}x^3-2)-4x$; г) $3x(x^2-x+1)-4x=5x^2+2(1-x^2)+3x^3-x$;

д) $(4x-1)(4x+1)-5x=-4(x-4x^2)-7(x+3)$.

14. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x|=2x+1$; б) $|2-x|=-0{,}5x+4$; в) $|2x+1|=-x$; г) $\frac{2}{3}|5t-1|=\frac{1}{3}t+2$.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с действительным параметром m:

а) $mx-6=3x+4$; б) $3-mx=2m(x+1)-1$;

в) $mx+m+3=x+4$; г) $2(mx+x)-3(x+4)=5-m$.

16. Составьте задания, подобные упражнению **12**, и предложите их одноклассникам для решения.

§ 2. Уравнения II степени с одним неизвестным

2.1. Формулы решений

Необходимо оградить участок земли, имеющий форму прямоугольного треугольника. Известно, что длина одного из катетов треугольника на 5 м меньше длины гипотенузы, а длина второго катета на 3 м меньше длины первого катета. Найдите длину ограды.

Решение:

Пусть x – длина гипотенузы. Тогда $(x-5)$ – длина первого катета, а $(x-8)$ – длина второго катета. По условию задачи, согласно теореме Пифагора, получим уравнение $(x-5)^2+(x-8)^2=x^2 \Leftrightarrow x^2-26x+89=0$, имеющее решения $x_1=13-4\sqrt{5}$, $x_2=13+4\sqrt{5}$.

Делаем вывод, что только число $13+4\sqrt{5}$ удовлетворяет условию задачи. (Обоснуйте, почему число $13-4\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию задачи.) Следовательно, длина гипотенузы равна $(13+4\sqrt{5})$ м. Тогда длины катетов равны $(5+4\sqrt{5})$ м и $(8+4\sqrt{5})$ м. Значит, длина ограды равна $(26+12\sqrt{5})$ м.

Ответ: $(26+12\sqrt{5})$ м.

Уравнение $x^2 - 26x + 89 = 0$ является уравнением II степени с одним неизвестным.

ВСПОМНИМ

Определения

- Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **уравнением II степени** (или **квадратным уравнением**) **с одним неизвестным**.
- Числа a, b, c называются **коэффициентами уравнения** II степени (число c называется еще **свободным членом**), x – **неизвестное уравнения**.

Множество решений уравнения обозначают буквой S.

Решить уравнение – значит найти множество его решений.

I. Неполные уравнения II степени

1. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$	**2.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$	**3.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(ax + b) = 0.$ $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}.$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ $S = \varnothing$, если $a \cdot c > 0$; $S = \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, если $a \cdot c < 0$.	$\boldsymbol{ax^2 = 0}$ $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0.$ $S = \{0\}.$

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $-x^2 + 0{,}5x = 0$;   б) $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$;   в) $-2x^2 + 5 = 0$;   г) $\sqrt{5}x^2 = 0$.

Решение:

а) $-x^2 + 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 0{,}5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 0{,}5$. *Ответ*: $S = \{0;\ 0{,}5\}$.

б) $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 = -1$. *Ответ*: $S = \varnothing$.

в) $-2x^2 + 5 = 0 \,|\cdot(-1) \Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow x =$ ______ или $x =$ ______. *Ответ*: $S =$ ______.

г) $\sqrt{5}x^2 = 0 \Leftrightarrow x =$ ______. *Ответ*: $S =$ ______.

Замечание. Разделив коэффициенты любого уравнения II степени $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, на a, получим равносильное уравнение $x^2 + px + q = 0$, называемое ***приведенным уравнением II степени***, где $p = \dfrac{b}{a}$, а $q = \dfrac{c}{a}$.

II. Уравнение II степени общего вида: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0}$

Существование и количество решений уравнения II степени зависят от знака дискриминанта $\Delta = b^2 - 4ac$ или $\Delta_1 = \dfrac{p^2}{4} - q$.

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$	$x^2+px+q=0$
$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q$
$\Delta>0$: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $S=\left\{\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$\Delta_1>0$: $x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\Delta_1}$, $x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\Delta_1}$; $S=\left\{-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\Delta_1}\right\}$
$\Delta<0$: Не имеет решений на $\mathbb{R}$. $S=\varnothing$	$\Delta_1<0$: Не имеет решений на $\mathbb{R}$. $S=\varnothing$
$\Delta=0$: $x=-\frac{b}{2a}$; $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$\Delta_1=0$: $x=-\frac{p}{2}$; $S=\left\{-\frac{p}{2}\right\}$

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^2-3x-2=0$; б) $x^2-11x+30=0$.

Решение:

а) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $\Delta=b^2-4ac=25$.

$$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2};\quad x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\cdot 2}=2.$$

Ответ: $S=\{-0{,}5;\ 2\}$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q=\frac{1}{4}$.

$$x_1=\square-\square=\square;\quad x_2=\square+\square=\square.$$

Ответ: $S=\{5,\ 6\}$.

Замечание. В некоторых уравнениях II степени коэффициент b – четное число, то есть $b=2k$, $k\in\mathbb{Z}^*$. Тогда эти уравнения имеют вид $ax^2+2kx+c=0$, $a\neq 0$. Дискриминантом таких уравнений является $\Delta=(2k)^2-4ac=4(k^2-ac)$. Следовательно, формулы их решений записываются так:

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a},\quad x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2x^2-8x+3=0$.

Решение:

ОДЗ: $\mathbb{R}$. Здесь $a=2$, $c=3$, $b=-8=2\cdot(-4)$. Тогда:

$$k=-4,\ \Delta_1=k^2-ac=16-6=10.$$

Следовательно, $x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{10}}{2}=2-0{,}5\sqrt{10}$, $x_2=\frac{\square+\sqrt{\square}}{2}=\square+\square$.

Ответ: $S=\{2-0{,}5\sqrt{10},\ 2+0{,}5\sqrt{10}\}$.

2.2. Соотношения между решениями и коэффициентами

ВСПОМНИМ

Теорема Виета

Если действительные числа x_1 и x_2 – решения уравнения

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0, \quad (1)$$

то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \quad (2)$$

Если действительные числа x_1 и x_2 – решения уравнения

$$x^2+px+q=0, \quad (3)$$

то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \quad (4)$$

Используя соотношения Виета (2), (4), решения некоторых уравнений II степени с одним неизвестным могут быть определены без непосредственного решения самих уравнений.

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $2x^2-3x-2=0$; б) $x^2-7x+12=0$.

Решение:

а) Найдем два действительных числа x_1, x_2 таких, что выполняются условия $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-1$ и $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$.

Подбором находим $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$.

Ответ: $S=\{-0{,}5;\ 2\}$.

б) Найдем два действительных числа x_1, x_2 таких, что выполняются условия $x_1\cdot x_2=q=\square$ и $x_1+x_2=-p=\square$.

Подбором находим $x_1=3$, $x_2=4$.

Ответ: $S=\{3,\ 4\}$.

ВСПОМНИМ

Теорема, обратная теореме Виета

Если действительные числа x_1 и x_2 таковы, что выполняются условия (2), то x_1, x_2 – решения уравнения (1).

Если действительные числа x_1 и x_2 таковы, что выполняются условия (4), то x_1, x_2 – решения уравнения (3).

Замечание. Применяя теорему, обратную теореме Виета, можно составить уравнение II степени, если известны его решения x_1 и x_2.

ПРИМЕНИМ

• Составьте уравнение II степени с одним неизвестным по его решениям $x_1=-5$, $x_2=2$.

Решение:

Так как $-5+2=-3=-p$ и $(-5)\cdot 2=-10=q$, получаем уравнение $x^2+3x-10=0$.

2.3. Уравнения, приводимые к уравнениям II степени с одним неизвестным

Некоторые более сложные уравнения могут быть сведены к уравнениям II степени методом введения вспомогательного неизвестного.

Например, уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0,\ a\neq 0,$ называемое ***биквадратным уравнением***, решают подстановкой $x^2=t$, где $t\geq 0$. В итоге данное уравнение сводится к уравнению II степени относительно t: $at^2+bt+c=0,\ a\neq 0.$ Решаем это уравнение, а затем – уравнение (5) относительно x, и тем самым находим решения исходного уравнения

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^4-x^2-1=0;$ б) $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0.$

Решение:

а) ОДЗ: $\mathbb{R}$. Пусть $x^2=t,\ t\geq 0.$ Тогда исходное уравнение сводится к уравнению $2t^2-t-1=0$, с решениями $t_1=-\frac{1}{2},\ t_2=1.$ Уравнение $x^2=-\frac{1}{2}$ не имеет действительных решений, а решениями уравнения $x^2=1$ являются $x_1=-1,\ x_2=1.$

Ответ: $S=\{-1,1\}.$

б) ОДЗ: $\mathbb{R}$. Обозначим $x^2-3x=z.$ Получим уравнение II степени $z^2+3z-28=0,$ имеющее решения $z_1=-7,\ z_2=4.$ Решим на ОДЗ уравнения $x^2-3x=-7$ и $x^2-3x=4.$

Уравнение $x^2-3x+7=0$ не имеет действительных решений.

Уравнение $x^2-3x-4=0$ имеет решения $x_1=-1,\ x_2=4.$

Ответ: $S=\{-1,4\}.$

2.4. Разложение выражений вида $ax^2+bx+c,\ a\neq 0,$ на множители

ВСПОМНИМ

Если $a\neq 0$ и $\Delta\geq 0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ (5), где x_1 и x_2 – действительные решения уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$

ПРИМЕНИМ

• Разложите на множители выражение $2x^2-3x-2.$

Решение:

Уравнение $2x^2-3x-2=0$ имеет решения $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=2.$

Следовательно, $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2).$

2.5. Уравнения II степени с одним неизвестным с параметром (дополнительно)

Уравнения II степени с одним неизвестным могут содержать *параметр*. В таких случаях необходимо исследовать существование решений уравнения в зависимости от значений параметра.

• Найдите значения действительного параметра m, при которых уравнения $x^2+mx+4=0$ и $x^2+4x+m=0$ имеют общее решение.

Решение:

Пусть x_1 – общее решение данных уравнений.

Подставив $x=x_1$, получим $x_1^2+mx_1+4=0$ и $x_1^2+4x_1+m=0$.

Выполнив вычитание, получим $x_1(m-4)+4-m=0 \Leftrightarrow (m-4)x_1=m-4$.

При $m=4$ уравнения идентичны: $x_1^2+4x_1+4=0$. Общее решение $x_1=-2$.

При $m\neq 4$ находим решение $x_1=1$. Подставив $x_1=1$ в одно из уравнений, находим $m=-5$.

Тогда получим уравнения $x^2-5x+4=0$ и $x^2+4x-5=0$, имеющие решения $x_1=1$, $x_2=4$ и соответственно $x_3=1$, $x_4=-5$.

Ответ: При $m=4$ уравнения имеют общее решение $x=-2$, а при $m=-5$ их общее решение $x=1$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Даны уравнения:

а) $5x^2-x^2-\sqrt{2}=0$; б) $3{,}4x^2-x+1-\sqrt{2}=0$; в) $(1-\sqrt{3})x^2+7x-3{,}5=0$.

Найдите пропущенное число:

а) 5; ▢; $-\sqrt{2}$; б) $-3{,}4$; -1; ▢; в) ▢; 7; $-3{,}5$.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-16=0$; б) $t^2-25=0$; в) $5x^2+2x=0$; г) $2x^2-x=0$;
д) $\sqrt{3}x^2+5=0$; е) $2x^2+14=0$; ж) $\frac{1}{3}x^2=0$; з) $\sqrt{3}x^2=0$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $4x^2+4x+1=0$; б) $5x^2-7x+2=0$; в) $3x^2-2x+1=0$;
г) $-4x^2+6x-5=0$; д) $0{,}1x^2-x-2{,}5=0$; е) $\sqrt{5}x^2+\sqrt{2}x+4=0$.

4. Решите на множестве $\mathbb{Z}$ приведенное уравнение II степени:

а) $x^2-2x+1=0$; б) $x^2-8x+12=0$; в) $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$;
г) $x^2+1\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}=0$; д) $x^2-3x-4=0$; е) $x^2-\sqrt{3}x+6=0$.

5. Не решая уравнение, определите знаки его решений:

а) $3x^2-x-2=0$; б) $x^2+x-12=0$; в) $-t^2+2t+8=0$; г) $u^2-10u+4=0$.

Формируем способности и применяем

6. Составьте уравнение II степени по его решениям:

а) 1 и 3; б) –4 и 5; в) –1 и –2; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$;
д) –3 и 3; е) 2,5 и 3,5; ж) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; з) $-1-\sqrt{2}$ и $-1+\sqrt{2}$.

7. Используя теорему Виета, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-2x-15=0$; б) $3x^2-x-2=0$; в) $2x^2+x-1=0$; г) $x^2-4x+5=0$.

8. Разложите на множители выражение:

а) x^2-2x-3; б) $2x^2-x-3$; в) $3x^2+x-1$;
г) $-3x^2-5x-2$; д) $-x^2+3x+4$; е) $2x^2-3x+1$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{x^2-5x}{x-4}=\frac{4}{4-x}$; б) $\frac{x^2-2x}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$; в) $\frac{3{,}5x^2}{x+2}=\frac{4x+6}{2+x}$.

10. Пусть x_1 и x_2 – решения уравнения:
1) $5x^2+3x-9=0$; 2) $-3x^2-x+1=0$; 3) $2{,}8x^2+2x-3{,}5=0$.

Не решая уравнение, вычислите: а) x_1+x_2; б) $x_1\cdot x_2$; в) $x_1^2+x_2^2$; г) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

11. Найдите два положительных числа, если известно, что их среднее арифметическое равно 12,5, а их среднее геометрическое равно 10.

12. Сумма действительного числа с утроенным его обратным числом равна 4. Найдите это число. Сколько решений имеет задача?

13. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:
а) $\sqrt{3}x^2+4x+\sqrt{3}=0$; б) $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{7}x+\sqrt{3}=0$; в) $(2x+1)^2=(4x+1)^2$;
г) $(1-3x)^2=(x+2)^2$; д) $5x^2-2\sqrt{5}x+1=0$; е) $(x-\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2}+3x)^2$.

14. Решите на множестве $\mathbb{R}$ биквадратное уравнение:
а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4+5x^2+4=0$; в) $a^4-a^2-2=0$;
г) $2x^4-3x^2+1=0$; д) $\frac{5}{3}z^4+\frac{1}{3}z^2-2=0$; е) $-t^4-7t^2+8=0$.

15. Решите уравнение, определите закономерность и найдите пропущенное число:

а)

$x^2+3x+2=0$	5
$x^2-3\sqrt{2}x+4=0$	?

б)

$3t^2+4t+1=0$	$\frac{8}{9}$
$2t^2-3t-1=0$	?

16. Найдите с точностью до 0,01 решения уравнения:
а) $2x^2-x-1=0$; б) $x(x-4)=6$; в) $x^2-3x+1=0$; г) $3x(x+1)-5=0$.

17. Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:
а) $x(x-\sqrt{7})=0$; б) $4x^2-4x+1=0$; в) $\sqrt{11}x^2=0$;
г) $-3x^2+x+4=0$; д) $x^2-x-1=0$; е) $x^2-x-20=0$.

18. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения и упорядочите заданные ниже слова в зависимости от неотрицательных решений соответствующих уравнений (указанных в скобках). Прокомментируйте полученную пословицу.
1) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$; 2) $2x^2-x-1=0$; 3) $x^2-3x-10=0$;
4) $-8x^2-3x+0{,}5=0$; 5) $x(x+\sqrt{15})=0$.

пожнет $\left(\frac{1}{8}\right)$	посеет (1)	кто $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	ветер (5)	бурю (0)

19. Найдите нули функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=3x-x^2$; б) $f(x)=-3x^2+x+2$; в) $f(x)=0,(4)x^2-1$; г) $f(x)=4{,}5x^2-2x-1$.

20. Найдите действительные корни многочлена:
а) $P(X)=-2X^2+X+3$; б) $P(X)=0{,}1X^2-X-20$;
в) $P(X)=2X^4-X^2-1$; г) $P(X)=9X^4-X^2$.

Развиваем способности и творим

21. Разложите на множители выражение:
а) t^4+t^2-2; б) t^4-t^2-2.

22. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $x(x-1)(x-2)(x-3)=3$; б) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=3$.

23. Используя метод подстановки, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $5x^2+3|x|-9=0$; б) $2x^2-1=|x|(|x|-2)$.

24. Составьте и решите примеры, подобные заданиям **15**, **17**.

25*. Найдите значения действительного параметра m, при которых уравнения $2x^2-3x+1=0$ и $3x^2+m(x+2)+1=0$ имеют общее решение.

26*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с действительным параметром m:
а) $mx^2-3x-1=0$; б) $(m-2)x^2+x-4=0$; в) $x^2-mx+4=0$;
г) $x^2+(m-3)x-5=0$; д) $mx^2-x-m=0$; е) $x^2+mx+2m=0$.

27. Составьте задачу, решение которой сводится к уравнению:
а) $x^2-8x-12=0$; б) $3x^2-5=0$.

§ 3. Дробно-рациональные уравнения

В уравнениях а) $3x-5=2(1-x)$, б) $2x+\frac{3x}{x-1}=x+1$, в) $1-\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{2x}{x-2}$ левая и правая части – рациональные выражения, то есть выражения, составленные из чисел и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления. Такие уравнения называются ***рациональными уравнениями***. В уравнениях б), в) и числитель, и знаменатель соответствующего алгебраического отношения содержат неизвестное. Такие уравнения называются ***рациональными уравнениями, содержащими неизвестное в знаменателе***, или ***дробно-рациональными уравнениями***.

ПРИМЕНИМ

Дробно-рациональные уравнения решаем по следующему *алгоритму*:

• Решите на множестве R уравнение
$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

Решение:

① Находим ОДЗ заданного уравнения.

ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

② Переносим все выражения в левую часть уравнения.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2-1}-\frac{3x}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0\Leftrightarrow$$

③ Приводим левую часть уравнения к виду $\frac{A}{B}$.

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=0.$$

④ Применяем правило приравнивания к нулю отношения.

$3x^2+2x-1=0$ и $x^2-1\neq 0$.

⑤ Решаем полученное уравнение (A = 0).

Уравнение $3x^2+2x-1=0$ имеет решения $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$.

⑥ Проверяем, все ли полученные значения удовлетворяют соответствующим условиям, в том числе, принадлежат ли они ОДЗ.

Так как $x_1=-1\notin$ ОДЗ, то это значение не может быть решением исходного уравнения.

$x_2=\frac{1}{3}\in$ ОДЗ.

⑦ Записываем ответ.

Ответ: $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Некоторые более сложные дробно-рациональные уравнения могут быть сведены к более простым уравнениям, если выполнить различные преобразования или применить метод введения вспомогательного неизвестного.

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0.$

Решение:

ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, так как $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ и оба отношения левой части уравнения не имеют смысла при $x=1$.

$$\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)^2}+\frac{3x}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+3\left(\frac{x}{x-1}\right)-2=0.$$

Введем вспомогательное неизвестное t. Пусть $\frac{x}{x-1}=t$. Получим уравнение $2t^2+3t-2=0$, имеющее решения $t_1=-2,\ t_2=\frac{1}{2}$. (Проверьте!) Для нахождения решения исходного уравнения остается решить уравнения $\frac{x}{x-1}=-2$ и $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$.

Первое уравнение имеет решение $x_1=\frac{2}{3}$, а второе – решение $x_2=-1$. (Проверьте!)

Значения $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=-1$ принадлежат ОДЗ. Следовательно, оба эти числа являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $S=\left\{-1,\ \frac{2}{3}\right\}$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Выявите дробно-рациональные уравнения:

а) $x-1=3$; б) $x^2-3x+4=0$; в) $\frac{t^2+1}{4}-\frac{t}{3}=\frac{1}{2}$;

г) $\frac{x}{x^2+2}-\frac{1}{x}=0$; д) $\frac{2}{t}-\frac{3}{t+1}=1$; е) $z^2-\frac{3}{z}-2=0$.

2. Какие элементы множества $\{-1, 0, 1, 5\}$ являются решениями уравнения:

а) $\frac{x^2}{x-5}=\frac{2x-1}{x-5}$; б) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}$; в) $\frac{3}{x}=x-2$; г) $\frac{t}{t^2-1}=\frac{t}{t+1}$?

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{1}{x}=2$; б) $-\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2x}=2{,}5$; г) $-\frac{3\sqrt{2}}{7x}=-\frac{1}{7}$.

4. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{4}$; б) $-\frac{5}{3x-2}=\frac{1}{2}$; в) $\frac{2x}{1-x}=\frac{2}{5}$; г) $\frac{3x+2}{x+2}=-\frac{1}{2}$.

5. Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:

а) $\frac{2x-1}{x-1}=\frac{5x^2-1}{x-1}$; б) $\frac{x^2+2}{2+x}=\frac{2x-1}{x+2}$; в) $\frac{x(x-1)}{1-3x}=\frac{x^2+4x}{3x-1}$; г) $\frac{x^2}{x^2+5}=\frac{2x(x-3)}{x^2+5}$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{2}{2x-5}-\frac{5}{5-2x}=\frac{4}{7}$; б) $\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{3-x}$; в) $\frac{2x^2}{x^2-16}=\frac{3x}{x+4}$.

Формируем способности и применяем

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}=\dfrac{5x}{x-3}$; б) $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x}{1-x}$;

в) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+3}{1-x^2}$; г) $\dfrac{x}{4x^2-4x+1}=-\dfrac{4x}{2x-1}$.

8. Дополните так, чтобы полученные уравнения были равносильными:

а) $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{2-3x}{1-x} \Leftrightarrow 2x^2-\square\, x+4=0$;

б) $\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2x}{x+2} \Leftrightarrow 5(x-\square)(2x-\square)=0$.

9. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\dfrac{0{,}5}{x+3}=\dfrac{2}{4x+12}$; б) $\dfrac{1{,}2}{2x-1}=-\dfrac{6}{5-10x}$; в) $\dfrac{2x-1}{x^2-8x+16}=\dfrac{4x-2}{2(x-4)^2}$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{10}{(x+1)(x-5)}$; б) $\dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{21}{x+3}$;

в) $\dfrac{x^2+x}{x-1}+2x=\dfrac{3x-1}{x-1}+2$; г) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x+4}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x(x-2)}$.

11. Найдите значение t, при котором:

а) сумма алгебраических отношений $\dfrac{6t+18}{3t-1}$ и $\dfrac{4t-26}{2t+5}$ равна 4;

б) разность алгебраических отношений $\dfrac{3t+1}{1-2t}$ и $\dfrac{t-1}{t+1}$ равна $\dfrac{1}{2}$;

в) сумма алгебраических отношений $\dfrac{t+1}{t-5}$ и $\dfrac{10}{t+5}$ равна их произведению;

г) разность алгебраических отношений $\dfrac{6}{2t-1}$ и $-\dfrac{2}{t-2}$ равна их произведению.

12. Найдите закономерность и впишите пропущенное уравнение:

а)

$\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3}$	$x^2-36=0$
$\dfrac{5x+7}{x-2}-\dfrac{2x+21}{x+2}=8\dfrac{2}{3}$	?

б)

$\dfrac{2(t-1)}{t+3}+\dfrac{t+3}{t-3}=5$	$\dfrac{x+6}{x-5}=0$
$\dfrac{4}{t+3}-\dfrac{5}{3-t}+1=\dfrac{1}{t-3}$	?

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(x^2-4)(2x+5)=0$; б) $\left(\dfrac{2+x}{x}-1\right)\cdot(6x-5)=0$; в) $(2x^2-3x+1)\cdot\left(\dfrac{x}{3x-1}+x\right)=0$;

г) $\left(\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}+2\right)\cdot\left(x+1-\dfrac{3}{x+2}+8\right)=0$; д) $(5x^2-7x+8)\cdot\left(\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{5x}{x-1}+4\right)=0$.

Развиваем способности и творим

14. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{7}{2x^2+4x}+\dfrac{1}{2x-4}=\dfrac{2}{4-x^2}$; б) $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{3x-2}{x^2-4}$;

в) $\dfrac{1}{t-8}+\dfrac{1}{t-6}+\dfrac{1}{t+6}+\dfrac{1}{t+8}=0$; г) $\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с действительным параметром m:

а) $\frac{x-m}{m}=\frac{2m}{x-m}$; б) $\frac{m}{x}+\frac{m-1}{x-1}=2$;

в) $\frac{x}{m}-2=\frac{m-1}{1-x}$; г) $\left|x+\frac{1}{x}-3\right|=m-3$.

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$ (D – область определения функции):

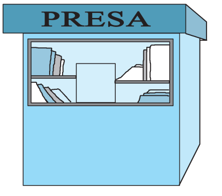
а) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$; б) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$.

§ 4. Системы уравнений

4.1. Понятие системы уравнений

1 В газетном киоске было 1305 журналов и газет. После того как продали 100 газет и 50 журналов, в киоске осталось вдвое больше газет, чем журналов.

Сколько газет и сколько журналов было вначале?



Решение:

Пусть x – первоначальное количество газет. По условию задачи получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} x+y=1305, \\ x-100=2(y-50), \end{cases}$ имеющую решение (870, 435). (Проверьте!)

Ответ: Первоначально в киоске было 870 газет и 435 журналов.

ОБОБЩИМ

Рассмотрим уравнения $A_1(x,y)=B_1(x,y)$ и $A_2(x,y)=B_2(x,y)$. Если нужно найти общие решения этих уравнений, то есть упорядоченные пары чисел $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, удовлетворяющие первому **и** второму уравнениям, то говорят, что задана ***система двух уравнений с двумя неизвестными***. Обозначают: $\begin{cases} A_1(x,y)=B_1(x,y), \\ A_2(x,y)=B_2(x,y). \end{cases}$

Система может состоять также из трех уравнений с тремя неизвестными, из двух уравнений с тремя неизвестными и т. д.

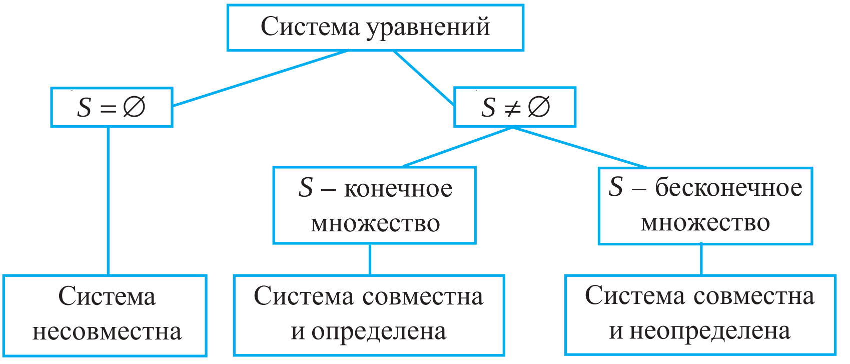
Определение

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, обращающая в верное равенство ***каждое*** уравнение системы.

Решить систему уравнений – значит найти множество ее решений.

Множество решений системы уравнений (обозначается буквой S) есть ***пересечение*** множеств решений уравнений этой системы.

Соотношения между количеством решений и видами систем уравнений



Решение системы уравнений, как правило, начинается с нахождения области ее допустимых значений.

Область допустимых значений (ОДЗ) системы уравнений есть пересечение областей допустимых значений уравнений системы.

Определение
Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между двумя равносильными системами уравнений ставится символ „$\Leftrightarrow$“.

Замечание. Равносильные системы, которые решаются на некотором множестве (как правило, на ОДЗ исходной системы), называются ***равносильными на данном множестве***.

Отметим некоторые преобразования, приводящие к равносильным системам:

Примеры

1) изменив порядок уравнений в системе, получаем систему, равносильную исходной;

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

2) заменив одно уравнение системы равносильным ему уравнением, получаем систему, равносильную исходной;

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 4x + 7y = 0. \end{cases}$$

3) выразив в одном из уравнений системы одно неизвестное через другое и подставив полученное выражение в остальные уравнения системы, получим систему, равносильную исходной;

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 8x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

4) заменив одно уравнение системы другим, которое образуется в результате сложения или вычитания двух уравнений системы (умноженных, если требуется, на некоторое число), получим систему, равносильную исходной.

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 11x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 14x = 4. \end{cases}$$

4.2. Методы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными

Основные методы решения систем уравнений

♦ ***Метод подстановки***:

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ x-7y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-4, \\ 3y-4-7y=5. \end{cases}$$

⇦ В одном из уравнений системы выражаем одно неизвестное через второе, и полученное выражение подставляем в другое уравнение системы.

♦ ***Метод сложения***:

$$\begin{cases} 2x+0{,}5y=2 \,|\, \times 4 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 11x=7. \end{cases}$$

⇦ Складываем (вычитаем) два уравнения системы, чтобы исключить одно из неизвестных.

♦ ***Метод введения вспомогательных неизвестных (вспомогательного неизвестного)***:

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{y-1}=3, \\ 4x^2+\dfrac{3}{y-1}=-2. \end{cases}$$

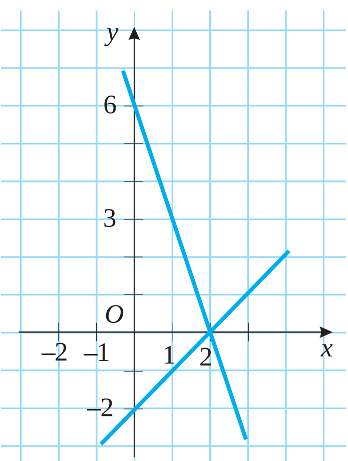
Пусть $x^2=u,\ \dfrac{1}{y-1}=v.$

Тогда получим систему $\begin{cases} u-v=3, \\ 4u+3v=-2. \end{cases}$

⇦ Вводим вспомогательные неизвестные, обозначив некоторые выражения этими неизвестными, для того, чтобы получить более простую систему. Решив полученную систему, переходим к решению исходной.

♦ ***Графический метод***:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ y=-3x+6. \end{cases}$$



$S=\{2\}.$

⇦ Строим в одной прямоугольной системе координат графики уравнений системы и находим (если существуют) координаты точек их пересечения. Если графики уравнений системы не пересекаются, следует, что система несовместна, то есть $S=\varnothing$.

Замечание. Метод подстановки, метод сложения и метод введения вспомогательных неизвестных (вспомогательного неизвестного) являются ***алгебраическими методами***, а графический метод является ***геометрическим методом***.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Выявите, какие из упорядоченных пар чисел $(0,-2)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(-3, 2)$ являются решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-y=-2, \\ 2x+3y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y=3, \\ x-y=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x=-2(x+y), \\ 5x+2y=-4. \end{cases}$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-3y=0, \\ 5x-y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 6x+2y=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 0{,}2x-3{,}5y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+y=2, \\ \dfrac{2}{5}x-3y=10. \end{cases}$

3. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом сложения систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-3y=-2, \\ 3x+y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}5y-3x=4{,}5, \\ 5x+2y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2{,}2x+3y=2, \\ 3x-4y=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{3}y=\dfrac{1}{6}, \\ 2x+2y=3. \end{cases}$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=2x, \\ x-2y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=3, \\ y+2x=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y-3x=0, \\ 2x-y=-6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=-2, \\ 2x-y=4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y=3x+4, \\ 6x-2y=12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ y=2x+1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x+y=1, \\ 3y=3-3x; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y-x=2, \\ -4x=12-4(y+1). \end{cases}$

5. Впишите такое действительное число, чтобы полученная система была совместной и:
1) неопределенной; 2) определенной.

а) $\begin{cases} 2x-\square\, y=-4, \\ 10x-6y=-20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+2y=-3, \\ \square\, x-6y=9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-y=-1, \\ -12x+4y=\square. \end{cases}$

Формируем способности и применяем

6. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3(x-2)=y-5, \\ 4x-3(y+1)=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}5x-3{,}4(5-y)=4{,}7, \\ -4x+8y=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-x=(x+1)^2+y, \\ -5x-2y=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} u-2\left(v-4\dfrac{1}{3}\right)=2\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{3}{4}u+\dfrac{1}{2}v=2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x-\sqrt{5}y=2\sqrt{5}, \\ 7x-y=10; \end{cases}$ е) $\begin{cases} u+v=6(u-v), \\ 4,(5)u-0,(32)v=0. \end{cases}$

7. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ графическим методом и алгебраическим методом систему:

а) $\begin{cases} 6-x=2y, \\ 2x+4y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-2)^2=x^2+y, \\ y+3x=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-3y=6, \\ 5(x-1)+6(y+2)=48; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x-3y=-7, \\ x^2+y=(x-1)^2+2. \end{cases}$

8. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$\begin{cases} 6x-10y=11, \\ 5y+7x=19; \end{cases}$	$\boxed{2,82}$
$\begin{cases} 2x-3y=14, \\ 7y+5x=10. \end{cases}$	$\boxed{?}$

Развиваем способности и творим

9. Раскрыв модули, решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} |x|+3|y|=5, \\ |x-2|+2|y-1|=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3|x+3|+|y-4|=0, \\ |x-6|+2|y|=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |a|+2|b|=-3, \\ |a^2-2|+|b-4|=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2|z-3|-|y+1|=2, \\ |z|+|y|=-5. \end{cases}$

10. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом введения вспомогательных неизвестных систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4, \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{5}{y-1}=-3, \\ \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{2(y-1)}=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{y-1}=3, \\ 4x^2+\dfrac{3}{y-1}=-2. \end{cases}$

11. Два корабля после встречи продолжили путь: один из них на юг, а другой – на запад. Через 2 часа расстояние между кораблями было равно 60 км. Найдите скорость каждого корабля, если известно, что скорость одного из них на 6 км/ч больше, чем скорость второго корабля.

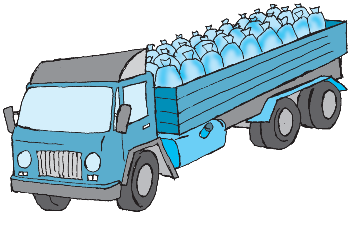
12. Составьте систему двух уравнений с двумя неизвестными по ее решениям:
а) (1, 5) и (5, 1); б) (–1, 0) и (1, 2); в) (1, 0) и (3, 2); г) (–2, –1) и (1, 1).

13. Лодка плыла по реке против течения. Шляпа слетела с головы лодочника, когда лодка проплывала под мостом. Лодочник заметил пропажу шляпы через час, развернулся и догнал ее на расстоянии 4 км от моста. Найдите скорость течения.

• ***Задача для чемпионов*** **14.** При каких действительных значениях параметра a система $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 10x-ay=15 \end{cases}$ является совместной и неопределенной?

§ 5. Решение задач с помощью уравнений и/или систем уравнений

Различные задачи из математики, физики, химии, экономики и других областей решаются с помощью уравнений, систем уравнений.



1 В машину погрузили 35 мешков муки и сахара. Весь груз составляет 2 т 500 кг. Мешок муки весит 80 кг, а сахара – 50 кг.
Сколько мешков муки и сколько мешков сахара погрузили в машину?

Решим задачу с помощью:

уравнения.

Пусть x – количество мешков муки. Тогда $(35 - x)$ – количество мешков сахара. Поскольку мешок муки весит 80 кг, то всего погрузили $80x$ кг муки. Так как мешок сахара весит 50 кг, то всего погрузили $50(35 - x)$ кг сахара.

По условию задачи получаем уравнение

$$80x + 50(35 - x) = 2500,$$

имеющее решение $x = 25$.

Таким образом, в машину погрузили 25 мешков муки и 10 мешков сахара.

системы уравнений.

Пусть x – количество мешков муки, а y – количество мешков сахара.

Поскольку всего погрузили 35 мешков, получим первое уравнение: $x + y = 35$.

Так как мешок муки весит 80 кг, а мешок сахара 50 кг, и всего погрузили 2 т 500 кг, получим второе уравнение:

$$80x + 50y = 2500 \Leftrightarrow 8x + 5y = 250.$$

По условию задачи получаем систему уравнений $\begin{cases} x + y = 35, \\ 8x + 5y = 250, \end{cases}$

имеющую решение (25, 10).

Ответ: Всего погрузили 25 мешков муки и 10 мешков сахара.

Вывод. В некоторых случаях задача может быть решена как с помощью уравнения, так и с помощью системы уравнений.

ВСПОМНИМ

Для решения задачи с помощью **уравнения** (**системы уравнений**):

① выявляем известные и неизвестные величины;

② обозначаем каждую выбранную неизвестную величину буквой;

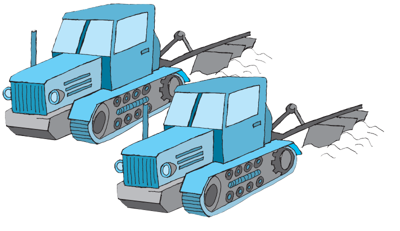
③ устанавливаем взаимосвязь известных и неизвестных величин и составляем уравнение (систему уравнений);

④ решаем уравнение (систему уравнений);

⑤ анализируем полученные результаты, выбираем решение и записываем ответ.

ПРИМЕНИМ

2 Тракторист вспахивает поле. Через 4 часа к нему присоединился еще один тракторист. Вместе они вспахали оставшийся участок поля за 8 часов. За сколько часов каждый тракторист мог бы вспахать поле, если известно, что первому для этого потребовалось бы на 8 часов больше?



Решение:

Пусть x – количество часов, за которое первый тракторист мог бы вспахать все поле. Тогда $(x - 8)$ – количество часов, за которое второй тракторист мог бы вспахать все поле. Производительность труда первого тракториста равна $\frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{x}\right.$ – часть поля, вспаханного за 1 час), а второго – $\frac{1}{x-8}$. Зная, что первый тракторист проработал

12 часов (4 часа один и еще 8 часов вдвоем), а второй – 8 часов, и учитывая производительность труда каждого тракториста, получаем уравнение:

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1.$$

Найдем решения этого уравнения.

ОДЗ : $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\,8\}$.

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1\Leftrightarrow\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}-1=0\Leftrightarrow\frac{12(x-8)+8x-x(x-8)}{x(x-8)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x^2+28x-96}{x(x-8)}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-28x+96}{x(x-8)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-28x+96=0,\\x(x-8)\neq 0.\end{cases}$$

Решениями системы, значит, и исходного уравнения, являются $x_1=24$, $x_2=4$. (Проверьте!)

Значение $x_2=4$ не удовлетворяет условию задачи. (Обоснуйте.)

Ответ: Первый тракторист мог бы вспахать все поле за 24 часа, второй – за 16 часов.

Задание. Решите задачу 2 с помощью системы уравнений.

3 85%-ный спиртовой раствор смешали с другим раствором и получили 10 л 79%-ного спиртового раствора.

Сколько литров каждого вида раствора смешали, если концентрация спирта во втором растворе была на 60% больше объема в литрах этого раствора?

Решение:

Пусть x – объем в литрах первого раствора. Тогда $(10-x)$ л – объем второго раствора. Первый раствор содержит $\frac{x\cdot 85}{100}$ литров спирта, а концентрация второго спиртового раствора составляет $(10-x+66)\%$.

Согласно условию задачи получаем уравнение $\frac{(10-x)(76-x)}{100}+\frac{85x}{100}=\frac{10\cdot 79}{100}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-x-30=0$, имеющее решения $x_2=-5$, $x_2=6$. (Проверьте!) Заметим, что значение $x_2=-5$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: Было смешано 6 л 85%-ного спиртового раствора с 4 л другого раствора.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

Решите задачи 1–4 с помощью уравнения.

1. Найдите два натуральных числа, если известно, что их сумма равна 12, а произведение – 11.
2. Найдите два целых числа, если известно, что их разность равна 15, а сумма их квадратов равна 725.
3. Какова длина и ширина прямоугольника, если известно, что его периметр равен 30 м, а площадь – 44 м^2?
4. Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше другой стороны. Найдите длины его сторон, если известно, что площадь прямоугольника равна 1720 см^2.

Решите задачи 5–6:

а) с помощью уравнения; **б) с помощью системы уравнений.**

5. За 6 400 леев купили два отреза ткани одинаковой длины, но разного вида. 1 метр ткани первого вида и 1 метр ткани второго вида вместе стоят 320 леев, а 4 м ткани первого вида стоят столько же, сколько 6 м ткани второго вида. Сколько стоит 1 м ткани каждого вида и сколько всего метров ткани было куплено?

6. Расстояние между двумя городами равно 240 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно отправились два поезда: один со скоростью 80 км/ч, а другой – со скоростью, равной $\frac{3}{4}$ скорости первого поезда. Какое расстояние преодолел каждый поезд до их встречи?

Формируем способности и применяем

Решите задачи 7–13 с помощью уравнения.

7. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 52. Если из этого числа вычесть 20, то получим перевернутое число. Найдите это число.

8. По плану завод должен изготовить 360 деталей. В первые восемь дней завод ежедневно перевыполнял план на 20%. В последующие дни завод ежедневно перевыполнял план на 25%. В результате было произведено на 82 детали больше, чем предусмотрено планом. За сколько дней завод должен был выполнить заказ?

9. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2. Если один из катетов уменьшить на 1 см, а другой увеличить на 3 см, то площадь полученного треугольника будет $27{,}5\text{ см}^2$. Найдите длины катетов первоначального треугольника.

10. Работая совместно, двое рабочих выполнили заказ за 12 часов. Если бы первый рабочий выполнил половину заказа, а затем второй – оставшуюся часть, то весь заказ был бы выполнен за 25 часов. За сколько часов каждый рабочий мог бы выполнить заказ?

11. Теплоход проходит по реке расстояние от пункта A до пункта B за 3 часа, а расстояние от B до A – за 4 часа. За сколько часов пройдет расстояние от A до B плот?

12. Сумма двух чисел равна 8, а сумма обратных им чисел равна 6. Найдите эти числа.

13. Сколько миллилитров спирта нужно добавить в 736 мл 16%-ного раствора йода, чтобы получить 10%-ный раствор йода?

Решите задачи 14–15:

а) с помощью уравнения; **б) с помощью системы уравнений.**

14. Сумма двух чисел равна 12, а их отношение равно $\frac{3}{7}$. Найдите эти числа.

15. 50 маек и 75 футболок вместе стоят 4 200 леев. После снижения цены маек на 10%, а футболок – на 20% за этот товар заплатили бы 3 487,5 лея. Найдите первоначальную цену маек и футболок.

Развиваем способности и творим

16. Сколько прямоугольных треугольников существует, если известно, что длины их сторон – натуральные числа, а длина одного из катетов равна 15 см?

17. Найдите два натуральных числа, если известно, что разность их квадратов равна 45. Сколько решений имеет задача?

18. Для перевозки 60 т товара потребовались грузовые автомобили. Учитывая плохое состояние дороги, в каждый автомобиль погрузили на 0,5 т товара меньше, чем было предусмотрено предварительно. Поэтому были выделены дополнительно 4 автомобиля. Сколько всего грузовых автомобилей было запланировано первоначально?

19. У фермера два вида азотных удобрений: 15%-ный и 21%-ный азот. Какое количество химических удобрений каждого вида должен смешать фермер, чтобы получить 1 т удобрений 18%-ного азота?

• ***Задача для чемпионов***

20. Собака, находящаяся в точке A, погналась за лисицей, которая была в 30 м от нее. Длина прыжка собаки равна 2 м, а лисицы – 1 м. На каком расстоянии от точки A собака догонит лисицу, если известно, что за одно и то же время собака делает два прыжка, а лисица – 3 прыжка?

Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x-3{,}5(x-4)=6$; б) $0{,}5(x-2)+2{,}3x=5x-4$;

в) $\frac{4}{5}(x+3)-\frac{2}{3}=\frac{5}{7}x+4$; г) $2{,}4(x-3)-4x=1-x$.

2. Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:

а) $5x^2-4x-1=0$; б) $-1{,}2x^2-7x=0$; в) $16x^2-1=0$;

г) $36x^2-12x+1=0$; д) $x^2-3x-4=0$; е) $3x^2+4=0$.

3. Используя теорему Виета, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-x-30=0$; б) $x^2+x-30=0$; в) $x^2-2x-120=0$;

г) $x^2-3x-180=0$; д) $x^2+5x-150=0$; е) $x^2+4x-32=0$.

4. Разложите на множители трехчлен:

а) $3X^2-2X-1$; б) $-2X^2+5X+3$; в) $16X^2+8X+1$.

5. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\frac{5x}{x-1}-\frac{2}{x+2}=3$; б) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5x}{x-1}=-3$;

в) $4-\frac{2}{x^2-4}=\frac{3x}{x-2}$; г) $\frac{5x}{x^2-9}-3=\frac{1}{x+3}$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-3y=4,\\5x-2y=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2y-3x=6,\\8y-2x=-3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+2y=1,\\\frac{1}{4}+\frac{2}{3}y=4;\end{cases}$

г) $\begin{cases}3x-y=-2,\\0{,}5(x-2)+y=8;\end{cases}$ д) $\begin{cases}x+y=3,\\4x-3y=-2;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=8,\\2\sqrt{2}x+3y=-9.\end{cases}$

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(2x^2-5x)(7x+1)=0$; б) $\left(\frac{x}{1-x}-2\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$;

в) $(3x^2+2x-1)(x^2-16)=0$; г) $\left(\frac{4}{x^2-25}-\frac{1}{x-5}\right)(6x^2-x-1)=0$.

8. В жилом доме 64 двухкомнатных и четырехкомнатных квартир. Сколько двухкомнатных и сколько четырехкомнатных квартир, если известно, что всего в доме 160 комнат?

9. Разность двух чисел равна 84, а их отношение равно $\frac{2}{5}$. Найдите эти числа.

10. Смешали 6 кг конфет по 33 лея и 12 кг конфет по 30 леев. Сколько стоит 1 кг полученного ассорти?

Формируем способности и применяем

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{3x^2}{x^2-2x+1}-\frac{5x}{x-1}+2=0$; б) $-\frac{5t^2}{(t+2)^2}+\frac{t}{t+2}+4=0$;

в) $z^4+4z^2-5=0$; г) $4x^2+5x+1=0$;

д) $\frac{2x}{x^2-16}-\frac{3}{x+4}=\frac{5-x}{x-4}$; е) $\frac{3}{2x-1}-\frac{4x}{x+2}=5$.

12. Не решая уравнение, определите знаки его решений:

а) $x^2-8x+3=0$; б) $x^2+12x+8=0$; в) $x^2-14x-\sqrt{7}=0$;

г) $6x^2-17x-23=0$; д) $2t^2-19t+1=0$; е) $x^2+\sqrt{5}x+18=0$.

13. Не решая уравнение $x^2-8x+12=0$, найдите:

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$,

где x_1, x_2 – решения данного уравнения.

14. Разложите на множители выражение:

а) $x^{12}-2x^6+1$; б) $(2x-1)^4-3(2x-1)^2+2$;

в) $3(2-x)^4-2(x-2)^2-1$; г) t^4-4t^2+4.

15. Пусть x_1 и x_2 – решения уравнения $x^2-8x+6=0$. Составьте уравнение II степени по его решениям:

а) $t_1=2x_1$ и $t_2=2x_2$; б) $t_1=\frac{x_1}{x_2}$ и $t_2=\frac{x_2}{x_1}$.

16. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}3(x-1)+4=5y,\\ x-8(y+0{,}5)=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-(x+y)+4y=3,\\ 5x-4(0{,}2-y)=-2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2-4(y+2)=(x-5)^2,\\ 3x-y=0.\end{cases}$

17. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x+5y=0,\\ x-y=-7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{2}y=x+1,\\ y-2x=-2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-y=8,\\ 3(x-1)=2+y.\end{cases}$

18. Поезд прошел путь в 210 км сначала со скоростью 60 км/ч, а на аварийном участке он снизил скорость до 20 км/ч. Весь путь был пройден за 6 часов. Найдите длину аварийного участка пути.

19. Смешали 2 л 20%-ного раствора соли и 8 л 30%-ного раствора соли. Какова концентрация соли в полученном растворе?

20. Сумма квадратов двух чисел равна 36. Разделив эти числа, получаем неполное частное 5 и остаток 3. Найдите эти числа.

21. Найдите закономерность и впишите пропущенное уравнение:

$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=11 \end{cases}$	$\boxed{t^2-4t-5=0.}$
$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$	$\boxed{?}$

22. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-y^2=15 \end{cases}$	$\boxed{17}$
$\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$	$\boxed{?}$

23. Найдите нули функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=-3x^2-x-4$; б) $f(x)=-3x^2+x+4$; в) $f(x)=x^4-x^2-20$.

24. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, проследовали дальше. Велосипедист, выехавший из пункта A, прибыл в пункт B на 95 минут раньше, чем другой достиг пункта A. Найдите скорость каждого велосипедиста, если известно, что расстояние между пунктами A и B равно 28 км.

25. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно две спортсменки. Каждая двигалась с постоянной скоростью и, прибыв в пункт назначения, не останавливаясь, отправилась обратно. Когда они встретились на обратном пути, оказалось, что первая спортсменка прошла на 4 км больше, чем вторая. Первая пришла в пункт A через 1 час после повторной встречи, а вторая пришла в пункт B через 2 ч 30 мин. Найдите скорость передвижения каждой спортсменки.

Развиваем способности и творим

26. Определите знаки решений уравнения II степени в зависимости от значений действительного параметра m:

а) $x^2-3x+m-1=0$; б) $x^2+(m+2)x-m+1=0$;

в) $2x^2-mx+3(m+1)=0$; г) $-3x^2-(m-1)x+4m=0$.

27. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|2x^2-x-2|=1$; б) $|x^2+x-2|=1-x$; в) $|-x^2+5x-6|=x^2$.

28. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-3y)^2=16, \\ x^2-y^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5|x|-3|y+2|=-4, \\ 4x^2-4|y+2|=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+xy=8, \\ x^2+y^2+xy=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2+y^2=3xy-1. \end{cases}$

29. Маме, отцу и сыну вместе – 84 года. Сыну и маме вместе – 45 лет, а сыну и отцу вместе – 52 года. Найдите возраст каждого члена семьи.

30. Составьте задачу, которая решалась бы с помощью:

а) уравнения $2x^2-3x-5=0$; б) системы уравнений $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-y=2. \end{cases}$

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Дано уравнение $3t^2 - \square\, t + 4 = 0$.

а) Дополните таким действительным числом, чтобы множество решений уравнения содержало два элемента. **2 б**

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, полученное в пункте а). **4 б**

в) Напишите многочлен второй степени, корнями которого являются противоположные значения решений, полученных в пункте б). **3 б**

2. Решите задачу с помощью системы уравнений:

Отношение числа мальчиков к числу девушек IX класса равно $\frac{3}{5}$.

а) Найдите сколько девушек в этом классе, если известно, что мальчиков на 6 меньше, чем девушек. **5 б**

б) Сколько всего учащихся в этом классе? **2 б**

3. Дана функция

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

а) Найдите значения a и b, при которых точки $A(1, 4)$ и $B(-2, 8)$ принадлежат графику функции f. **5 б**

б) Решите при $a = 2$ и $b = 3$ на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $\frac{f(x)}{x-1} + x = 5$. **5 б**

II вариант

1. Дано уравнение $2z^2 + \square\, z - 5 = 0$.

а) Дополните таким действительным числом, чтобы множество решений уравнения содержало два элемента.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, полученное в пункте а).

в) Напишите многочлен второй степени, корнями которого являются противоположные значения решений, полученных в пункте б).

2. Решите задачу с помощью системы уравнений:

Отношение количества учебников в школьной библиотеке к количеству книг художественной литературы равно $\frac{2}{3}$.

а) Найдите сколько учебников в библиотеке, если известно, что учебников на 350 меньше, чем книг художественной литературы.

б) Сколько всего книг в школьной библиотеке?

3. Дана функция

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = mx + n,\ m, n \in \mathbb{R}$.

а) Найдите значения m и n, при которых точки $A(-2, 1)$ и $B(3, 11)$ принадлежат графику функции g.

б) Решите при $m = 3$ и $n = -1$ на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $\frac{x^2+7}{g(x)} - x = 3$.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	26–24	23–22	21–20	19–16	15–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Глава 5 Неравенства. Системы неравенств

§ 1. Неравенства и системы неравенств I степени с одним неизвестным. Повторение и дополнение

1.1. Неравенства с одним неизвестным

1 Две фирмы принимают заказы на изготовление ученических билетов. Фирма „BMR“ берет 200 леев за оформление заказа и по 10 леев за изготовление каждого ученического билета, а фирма „CAR“ – 50 леев за оформление заказа и по 15 леев за каждый ученический билет. Укажите наименьшее количество ученических билетов, которое выгоднее заказать фирме „BMR“, чем фирме „CAR“.

Решение:

Пусть x – необходимое количество ученических билетов. По условию задачи, фирме „BMR“ за выполнение заказа нужно заплатить $(200+10x)$ леев, а фирме „CAR“ – $(50+15x)$ леев.

Для ответа на вопрос задачи нужно решить на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $200+10x<50+15x$ и выбрать из множества его решений наименьшее натуральное число.

Неравенство $200+10x<50+15x$ является примером неравенства с одним неизвестным.

Определение

Решением неравенства с одним неизвестным называется ***любое*** значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество его решений.

Множество решений неравенства обозначается буквой S и записывается в виде числового промежутка.

Определение

Два неравенства называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между двумя равносильными неравенствами ставится символ „ $\Leftrightarrow$“.

При решении неравенств используют следующие равносильные преобразования, основанные на свойствах числовых неравенств на множестве действительных чисел:

		Примеры
1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x) < f(x)$	– если левую и правую части неравенства поменять местами, заменив знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному;	$x+3 > 2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x < x+3$
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)+a > g(x)+a$	– если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то получим неравенство, равносильное данному;	$2x+5 > 7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x > 7-5$
3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ для любого $a \in \mathbb{R},\ a > 0$	– если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное действительное число, то получим неравенство, равносильное данному;	$3x > 27 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 27:3$
4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ для любого $a \in \mathbb{R},\ a < 0$	– если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное действительное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.	$-3x < 81 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 81:(-3)$

1.2. Числовые промежутки

Пусть $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

Множество	Числовой промежуток	
	Обозначают	Геометрическая интерпретация
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$	$[a,\ b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	$[a,\ b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	$(a,\ b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	$(a,\ b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$	$(a,\ +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$	$[a,\ +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	$(-\infty,\ b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$	$(-\infty,\ b]$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty,\ +\infty)$	

1.3. Неравенства вида $ax+b\geq 0$ $(\leq,\ >,\ <)$, $a,\ b\in\mathbb{R}$

Пусть $a,\ b\in\mathbb{R}$. Для неравенства $ax+b\geq 0$ с неизвестным $x\in\mathbb{R}$ имеем:

$$ax+b\geq 0 \Leftrightarrow ax\geq -b.$$

Рассмотрим случаи, когда $a\neq 0$ и $a=0$.

1) Случай $a\neq 0$

а) Если $a>0$, то $ax\geq -b \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{b}{a}$. Значит, $S=\left[-\dfrac{b}{a},\ +\infty\right)$.

б) Если $a<0$, то $ax\geq -b \Leftrightarrow x\leq -\dfrac{b}{a}$. Значит, $S=\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{a}\right]$.

2) Случай $a=0$

а) Если $a=0$ и $b>0$, то $S=\mathbb{R}$.

б) Если $a=0$ и $b=0$, то $S=\mathbb{R}$.

в) Если $a=0$ и $b<0$, то $S=\varnothing$.

Задание. Аналогично решите неравенства вида $ax+b\leq 0$ $(>,\ <)$, где $a,\ b\in\mathbb{R}$.

Определение

Неравенствами **I степени с одним неизвестным** называются неравенства вида $ax+b<0,\ ax+b>0,\ ax+b\leq 0,\ ax+b\geq 0$, где $a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$,

Вернемся к рассмотренной в начале параграфа задаче 1 и решим неравенство:

$$200+10x<50+15x \Leftrightarrow 15x-10x>200-50 \Leftrightarrow 5x>150 \Leftrightarrow x>30.$$

Ответ: Наименьшее количество ученических билетов, которое выгоднее заказать фирме „BMR“, равно 31.

Задание. Назовите, какие равносильные преобразования неравенств применили при решении этого неравенства.

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

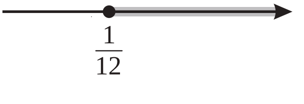
а) $x-5\leq 15x-2(x+3)$;   б) $\dfrac{12x-1}{3}<4x+3$;   в) $\dfrac{2-3x}{3}>\dfrac{5-2x}{2}$;

г) $|2x-1|<3$;   д) $|x-4|\geq 1$.

Решение:

а) $x-5\leq 15x-2(x+3) \Leftrightarrow x-5\leq 15x-2x-6 \Leftrightarrow x-15x+2x\leq -6+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12x\leq -1 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{12}$. Значит,



Ответ: $S=\left[\dfrac{1}{12},\ +\infty\right)$.

б) $\dfrac{12x-1}{3}<4x+3 \Leftrightarrow 12x-1<12x+9 \Leftrightarrow 12x-12x<9+1 \Leftrightarrow 0\cdot x<10.$

Ответ: $S=\mathbb{R}$.

в) $\dfrac{2-3x}{3} > \dfrac{5-2x}{2} \Leftrightarrow 4-6x > 15-6x \Leftrightarrow 6x-6x > 15-4 \Leftrightarrow 0\cdot x > 11.$

Неравенство не имеет решений.

Ответ: $S = \varnothing$.

г) $|2x-1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2.$

Ответ: $S = [-1, 2]$.

д) $|x-4| > 1 \Leftrightarrow x-4 > 1$ или $x-4 < -1 \Leftrightarrow x > 5$ или $x < 3$.

Ответ: $S = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$.

Замечание. Множество решений неравенства I степени можно найти и другим способом – исследуя знак соответствующей функции.

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2x+8<0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+8$.

Находим ее нуль: $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Составим таблицу знаков функции f:

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$	–	–	0	+	+

Значит, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -4)$ (рис. 1)

Ответ: $S = (-\infty, -4)$.

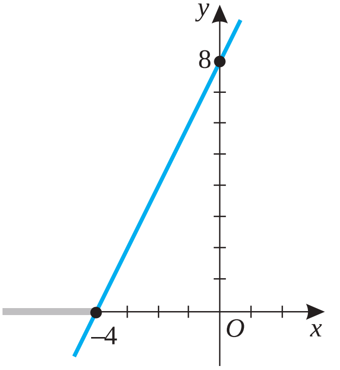


Рис. 1

1.4. Системы неравенств I степени с одним неизвестным

2 Для приготовления в школьной столовой 20 порций первого блюда необходимо 0,5 кг мяса и 1 кг риса, а на приготовление одной порции второго блюда необходимо 0,1 кг мяса и 0,15 кг риса.

Сколько комплексных обедов было приготовлено, если известно, что было израсходовано больше 11 кг мяса и меньше 18 кг риса?

Решение:

Пусть x – количество приготовленных комплексных обедов. Тогда мяса было израсходовано $\left(\dfrac{0{,}5x}{20} + 0{,}1x\right)$ кг, а риса $\left(\dfrac{x}{20} + 0{,}15x\right)$ кг. По условию задачи получаем неравенства $\dfrac{0{,}5x}{20} + 0{,}1x > 11$ и $\dfrac{x}{20} + 0{,}15x < 18$. Нужно найти на множестве $\mathbb{N}$ общие решения первого **и** второго неравенств. В таких случаях говорят, что нужно решить систему двух неравенств (I степени) с одним неизвестным:

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}5x}{20} + 0{,}1x > 11 \\ \dfrac{x}{20} + 0{,}15x < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4x > 440 \\ x + 3x < 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 440 \\ 4x < 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 88, \\ x < 90. \end{cases}$$

На множестве $\mathbb{N}$ система имеет единственное решение: 89.

Ответ: Было приготовлено 89 комплексных обедов.

В общем случае ***система двух неравенств I степени с одним неизвестным*** обозначается:

$$\begin{cases} a_1x+b_1 \geq 0, \ a_1 \in \mathbb{R}^*, \ b_1 \in \mathbb{R}, \\ a_2x+b_2 \geq 0, \ a_2 \in \mathbb{R}^*, \ b_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Определение

Решением системы неравенств I степени с одним неизвестным называется любое значение неизвестного, обращающее ***каждое*** неравенство системы в верное числовое неравенство.

***Замечания*. 1.** Система неравенств может состоять из неравенств, содержащих любой из символов „ $<$ “, „ $\leq$ “, „ $>$ “, „ $\geq$ “.

2. Существуют системы из двух, трех и более неравенств.

Решить систему неравенств – значит найти множество ее решений.

Множество решений системы неравенств (обозначается буквой S) есть ***пересечение*** множеств решений неравенств этой системы.

Определение

Две системы неравенств называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между равносильными системами неравенств ставится символ „ $\Leftrightarrow$ “.

Замечание*.** Равносильные системы неравенств, решаемые на некотором множестве, называются ***равносильными на этом множестве.

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x+2), \\ 2x-1>5. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x+2) \\ 2x-1>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 \leq 2x+4 \\ 2x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7, \\ x>3. \end{cases}$$

$x \in (3, 7]$

Ответ: $S=(3, 7]$.

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство $-2<2x+1<5$.

Решение:

Двойное неравенство может быть записано в виде системы неравенств:

$$-2<2x+1<5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>-2 \\ 2x+1<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-3 \\ 2x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x<2. \end{cases}$$

$x \in (-1{,}5; 2)$

Ответ: $S=(-1{,}5; 2)$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Определите, на каком из рисунков изображен промежуток $(-3, 2]$:

а) 

б) 

в) 

г) 

2. Изобразите на числовой оси и запишите в виде числового промежутка множество решений неравенства:

а) $-3 \le x < -2$; б) $6{,}5 \le x \le 11{,}5$; в) $2 < x < 4$; г) $x > -2$; д) $x \le 6$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $7x - 5{,}3 < 8{,}7$; б) $1 - 3x > 7$; в) $30 + 5x \le 18 - 7x$;

г) $5(x-1) + 7 \ge 1 - 3(x+2)$; д) $x - \dfrac{2x+3}{2} \le \dfrac{x-1}{4}$.

4. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

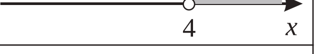
а) $5{,}6(x-3) - 3{,}2(2-x) < 20{,}8$; б) $4{,}8(x-4) - 3{,}7(2-x) < 24{,}4$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ x - 3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 - x \le 0, \\ 3x + 2 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 0{,}5 \ge 0, \\ 2x - 5 \ge 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1{,}2x - 6 \le 0, \\ 4x - 3 \le 0. \end{cases}$

6. Дополните таблицу по образцу первой строки:

1	x меньше или равно семи	$x \le 7$	$(-\infty, 7]$	
2	x больше или равно двум			
3		$-3 < x < 5$		
4	x меньше, чем 5,4			
5				
6			$(-\sqrt{3}, +\infty)$	

Формируем способности и применяем

7. Две одинаковые авторучки дороже трех одинаковых блокнотов. Что дороже: 7 таких авторучек или 10 таких блокнотов?

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(x-3)(x+2) - (x-3)^2 > 15x - 10$; б) $(x+2)^2 - (x+2)(x-5) < 14x - 7$;

в) $5(x-2) - 3 \le \dfrac{9(x-2)}{2} - 3(2x-4)$; г) $\dfrac{3}{2x-1} > 0$; д) $\dfrac{-2}{4x-12} \le 0$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases}17x-2>12x-1,\\ 3-9x<1-x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-5\le 15-3x,\\ 1-4x>22-3x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4-x\ge \dfrac{x-1}{3},\\ \dfrac{7x-1}{8}\ge 6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5(x+1)\ge 3(x+3)+1,\\ 2(2x-1)<7(x+1).\end{cases}$

10. Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{24x-48}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{4-5x}}$; в) $f(x)=\sqrt{10-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство:

а) $-5<3-2x<1$; б) $1<3x-2<7$;

в) $-2\le 4-3x\le 10$; г) $3x-2<4x+1<3x+5$.

12. На одной полке на 5 книг больше, чем на другой. Известно, что на второй полке размещено меньше, чем 11 книг, а на обеих полках вместе – не меньше, чем 25 книг. Сколько книг на каждой полке?

13. Отрезки длиной 5, 8 и x являются сторонами треугольника. Найдите допустимые значения неизвестного x.

14. За 8 рейсов автобус перевез больше 187 пассажиров. При этом все места в автобусе были заняты и только в одном из рейсов два пассажира ехали стоя. На следующий день тот же автобус выполнил 15 рейсов, во время которых свободными оказались три места, и перевез меньше 367 пассажиров. Сколько мест в автобусе?

15. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$3x-1\ge 5(x+2)-3$	-4
$2(x+3)\ge 6x+4{,}5$	?

Развиваем способности и творим

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $|3x+2|>1$; б) $|6-9x|\ge 18$; в) $|3x+7|<5$.

17. Найдите значения действительного параметра a, при которых система неравенств имеет хотя бы одно решение:

а) $\begin{cases}x<2,\\ x>a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\le 3,\\ x>a;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\le -3,\\ x\ge a;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\le a.\end{cases}$

18. Найдите значения действительного параметра a, при которых система неравенств не имеет решений:

а) $\begin{cases}x<3,\\ x>a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\le 2,\\ x>a;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\le 5,\\ x\ge a;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x\ge -2,\\ x\le a.\end{cases}$

19. Найдите значения действительного параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases}2(a-3x)<1-x\\ 5-x>3+3(x-a)\end{cases}$ имеет на множестве $\mathbb{R}$ не менее одного решения.

20. Найдите значения действительного параметра a, при которых двойное неравенство $-5\le x\le a$ имеет множество решений:

а) $S=\{-5\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=[-5;a]$.

§ 2. Неравенства II степени с одним неизвестным. Метод интервалов

2.1. Неравенства II степени с одним неизвестным

Мастерская. **1.** Постройте в отдельной системе координат график каждой из функций:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 3;$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + 4x + 4;$$
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = -x^2 + 2x - 5.$$

2. Найдите знаки функций f, g, h.

3. Сравните и прокомментируйте полученные результаты.

ИССЛЕДУЕМ

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x^2 - x - 6 > 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 6$.
Найдем нули функции f:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ или } x = 3.$$

Изобразим схематически график функции f (параболу) в прямоугольной системе координат (рис. 2).

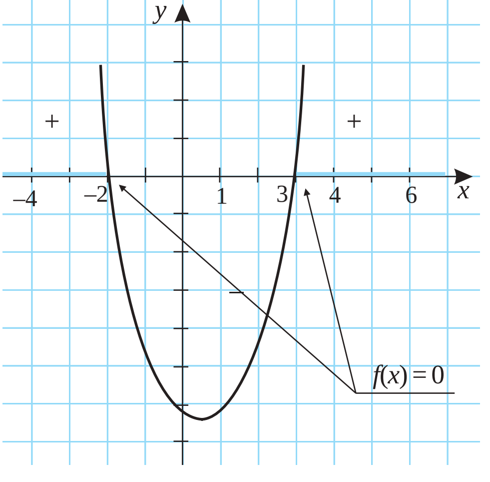


Рис. 2

Определим по графику значения x, при которых $f(x) > 0$. Получим $x < -2$ или $x > 3$.

Ответ: $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

Определение

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0,$ $a, b, c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ называются **неравенствами II степени с одним неизвестным**.

Определение

Решением неравенства II степени с одним неизвестным называется любое значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

При решении неравенств применяют равносильные преобразования, используя свойства числовых неравенств на множестве действительных чисел.

Алгоритм решения неравенств II степени с одним неизвестным

① Равносильными преобразованиями приводим неравенство к неравенству вида

$$ax^2+bx+c>0\ (ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c\leq 0),\ \ a\neq 0.$$

② Задаем функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=ax^2+bx+c,\ \ a\neq 0.$

③ Находим нули функции f, решив уравнение $ax^2+bx+c=0,\ \ a\neq 0.$

④ Изобразим схематически график функции f.

⑤ Находим значения x, при которых $f(x)>0\ \ (f(x)<0,\ f(x)\geq 0,\ f(x)\leq 0).$

⑥ Записываем ответ.

ПРИМЕНИМ

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $-4x^2+4x-1\geq 0.$

Решение:

Рассмотрим функцию

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x^2+4x-1.$$

Находим нули функции f:

$$-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

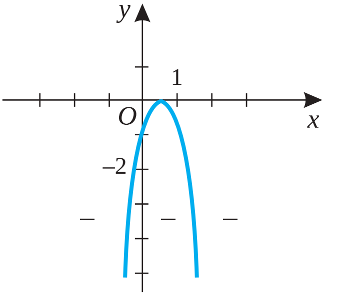


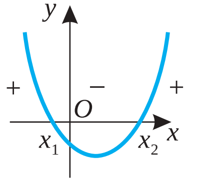
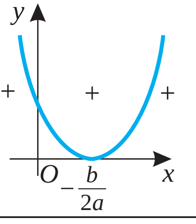
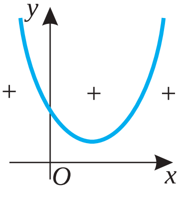
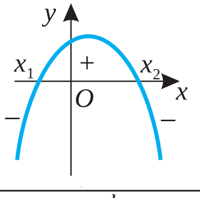
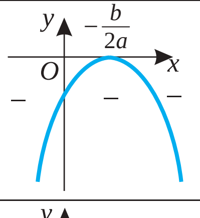
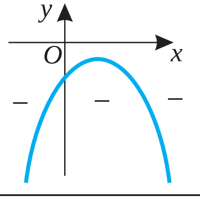
Рис. 3

Построим в прямоугольной системе координат график функции f (рис. 3). По графику определяем, что $f(x)\geq 0$ только при $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$

Данный способ решения неравенств II степени основан на свойствах функции II степени.

Исследование неравенств вида $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$, и $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0$

Значения		Знаки функции $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$	Множество решений неравенства $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$	Множество решений неравенства $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0$
a	Δ			
$a>0$	$\Delta>0$		$S=(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$	$S=(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,\ +\infty)$
	$\Delta=0$		$S=\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$	$S=\mathbb{R}$
	$\Delta<0$		$S=\mathbb{R}$	$S=\mathbb{R}$
$a<0$	$\Delta>0$		$S=(x_1,\ x_2)$	$S=[x_1,\ x_2]$
	$\Delta=0$		$S=\varnothing$	$S=-\frac{b}{2a}$
	$\Delta<0$		$S=\varnothing$	$S=\varnothing$

Замечание. Неравенства вида $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $a\neq 0$, всегда можно свести к неравенствам рассмотренных в таблице видов путем умножения обеих частей неравенства на –1.

2.2. Метод интервалов

ИССЛЕДУЕМ

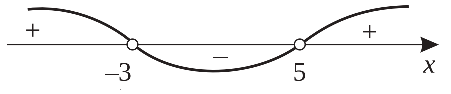
Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x^2-2x-15<0$.

Решение:

Разложим на множители левую часть неравенства: $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$. Зададим функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$, и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+3$. Составим таблицу знаков функций f и g:

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$f(x)$	–	–	–	0	+
$g(x)$	–	0	+	+	+
$f(x)\cdot g(x)$	+	0	–	0	+

Из таблицы следует, что на каждом из интервалов $(-\infty, -3)$, $(-3, 5)$ и $(5, +\infty)$ функция $f\cdot g$ сохраняет свой знак. Говорят, что при переходе через точки – 3 и 5 знак функции $f\cdot g$ меняется следующим образом:



Следовательно, $x^2-2x-15<0$ при $x\in(-3, 5)$.

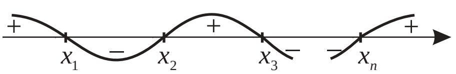
Ответ: $S=(-3, 5)$.

ОБОБЩИМ

Рассмотрим функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные действительные числа, являющиеся ее нулями.

В каждом из интервалов, на которые разбивается область определения функции f ее нулями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль функции ее знак меняется.

Изменение знаков функции f графически изображается при помощи „кривой знаков“:



Данное графическое изображение интерпретируется следующим образом: на интервалах, где „кривая знаков“ расположена выше числовой оси, выполняется неравенство $f(x)>0$, а на интервалах, где „кривая знаков“ расположена ниже числовой оси, выполняется неравенство $f(x)<0$.

Этот метод решения называют ***методом интервалов***.

ПРИМЕНИМ

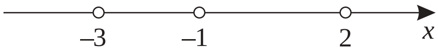
• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(x-2)(x+1)(x+3)>0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)(x+1)(x+3)$.

Находим нули функции f: $f(x)=0$ при $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

Отметим на числовой оси нули функции f:

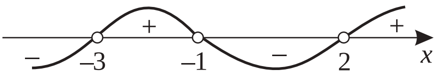


Определим знак функции f на интервале $(2,\ +\infty)$. Для этого выберем любую точку интервала и определим знак функции f в этой точке:

$$4 \in (2,\ +\infty),\ f(4) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 0.$$

Следовательно, $f(x) > 0$ при $x \in (2,\ +\infty)$.

Аналогично поступаем с остальными интервалами и строим „кривую знаков“:



Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-3,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$.

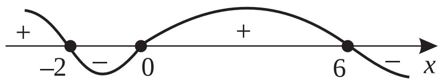
Ответ: $S = (-3,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$.

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x(6-x)(x+2) \le 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x(6-x)(x+2)$. Находим нули функции f: $f(x) = 0$ при $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6$.

Строим „кривую знаков“:



Следовательно, $f(x) \le 0$ при $x \in [-2,\ 0] \cup [6,\ +\infty)$.

Ответ: $S = [-2,\ 0] \cup [6,\ +\infty)$.

2.3. Рациональные неравенства

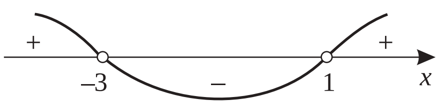
ИССЛЕДУЕМ

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\dfrac{2x+6}{x-1} < 0$.

Решение:

$\dfrac{2x+6}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x+6)(x-1) < 0$.

Рассмотрим функцию $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = (2x+6)(x-1)$. Замечаем, что $g(x) = 0$ при $x_1 = -3,\ x_2 = 1$. Строим „кривую знаков“:



Таким образом, $g(x) < 0$ при $x \in (-3,\ 1)$.

Ответ: $S = (-3,\ 1)$.

Определение

Неравенства вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \ge 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \le 0$, где $P(X),\ Q(X)$ – многочлены, соответствующие числителю $P(x)$ и знаменателю $Q(x)$, называются **дробно-рациональными неравенствами с одним неизвестным**.

Замечание. При решении неравенства $\frac{2x+6}{x-1}<0$ можно было не переходить к равносильному ему неравенству $(2x+6)(x-1)<0$, а рассмотреть функцию $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$, найти нули этой функции (нули числителя) и нули знаменателя соответствующей алгебраической дроби и отметить их на числовой оси, построить „кривую знаков“ и получить ответ.

Для решения дробно-рациональных неравенств с одним неизвестным методом интервалов можно применить следующий *алгоритм*:

① Равносильными преобразованиями приводим исходное неравенство к неравенству вида $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ $(\geq, <, \leq)$, где $P(X)$ и $Q(X)$ – многочлены, соответствующие числителю $P(x)$ и знаменателю $Q(x)$.

② Определяем множество D, которое находим, исключив из множества $\mathbb{R}$ решения уравнения $Q(x)=0$.

③ Задаем функцию $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

④ Находим нули функции, то есть нули числителя, решив уравнение $P(x)=0$.

⑤ Отмечаем на числовой оси множество D и нули функции f.

⑥ Строим „кривую знаков“.

⑦ Выбираем интервалы, соответствующие знаку функции f.

⑧ Записываем ответ.

ПРИМЕНИМ

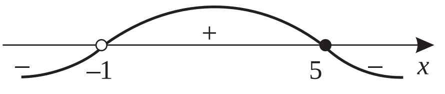
• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\frac{5-x}{2x+2}\geq 0$.

Решение:

$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{5-x}{2x+2}$. Отметим, что $f(x)=0$ при $x=5$. Учитываем, что 5 – решение неравенства, а –1 не является его решением.

Строим „кривую знаков“:



Следовательно, $f(x)\geq 0$ при $x\in(-1, 5]$.

Ответ: $S=(-1, 5]$.

Замечания. **1.** Значения, при которых функция f не определена (нули знаменателя), не включаются в множество решений исходного неравенства (графически на числовой оси нули знаменателя изображаются незакрашенными кружочками).

2. Нули функции f (нули числителя) не включаются в множество решений исходного неравенства, если это неравенство содержит символ „ >“ или „ <“. Нули функции f включаются в множество решений исходного неравенства, если это неравенство содержит символ „ ≥“ или „ ≤“ (в этом случае графически на числовой оси нули изображаются закрашенными кружочками).

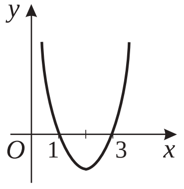
Упражнения и задачи

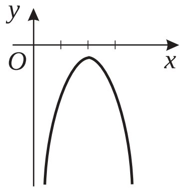
Фиксируем знания

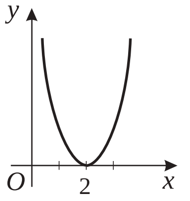
1. Равносильны ли неравенства:

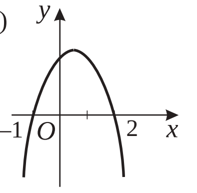
а) $x^2 \le 1$ и $x \le 1$; б) $x^2 > 4$ и $x > 2$; в) $(x+3)^2 \ge 0$ и $(x+5)^2 \ge 0$?

2. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, задана графически.

а) 

б) 

в) 

г) 

Запишите, используя график, множество решений каждого из неравенств $f(x) > 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \le 0$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; б) $-x^2 - 2x + 48 < 0$; в) $8x^2 + 10x - 3 \le 0$; г) $25x^2 - 10x + 1 > 0$;
д) $49x^2 - 28x + 4 \le 0$; е) $4x^2 - 4x + 15 > 0$; ж) $7x < x^2$; з) $4x^2 - x < 5$;
и) $x^2 \ge 16$; к) $9 - x^2 > 0$; л) $16x^2 + 1 \le 8x$; м) $3x^2 + 27 > 0$.

4. Решите методом интервалов на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(x+8)(x-5) > 0$; б) $x(x+2) \le 0$; в) $\dfrac{x-5}{x+6} < 0$; г) $\dfrac{x+1}{x+4} \ge 0$; д) $\dfrac{2x-1}{1-3x} \ge 0$.

Формируем способности и применяем

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $x(x+5) - 2 > 4x$; б) $(x+4)(x+5) - x \le 5$;
в) $(5x+1)(3x-1) > (4x-1)(x+2)$; г) $2x(3x-1) \ge 4x^2 + 5x + 9$.

6. Составьте неравенство II степени по его множеству решений:

а) $S = \mathbb{R}$; б) $S = \varnothing$; в) $S = [-2, 3]$; г) $S = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; д) $S = \{3\}$.

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $3x^2 + 4 \le 10 - x(x-2)$; б) $(3x-2)^2 \ge 3x(x-1)$;
в) $\dfrac{-3}{x^2 + x - 20} \ge 0$; г) $\dfrac{1}{x^2 + 5x + 7} < 0$.

8. Найдите область определения функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{1 - x - 2x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3x^2 + 12x}}$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $x(x+2)(x-3) < 0$; б) $(2x+1)(3-x)(x+5) \ge 0$; в) $(x-1)(x^2 - 5x + 6) \le 0$;
г) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 2x) > 0$; д) $\dfrac{(2x+1)(3-x)}{x^2+4} > 0$; е) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x} \le 0$; ж) $\dfrac{x^2 - x - 6}{x-1} \ge 0$.

Развиваем способности и творим

10. Можно ли из листа бумаги размерами 10 см и 3 см вырезать прямоугольник, у которого ширина на 4 см меньше длины, а площадь больше, чем 21 см^2?

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{4x-2}{3x+5} + 4 \le 0$; б) $3 - x \ge \dfrac{1}{2-x}$; в) $x + \dfrac{2}{x} > 3$; г) $\dfrac{7x-5}{x+1} > x$.

12. Решите на множестве $\mathbb{Z}$ систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1}<0, \\ x^2<36. \end{cases}$

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-12>0, \\ -x^2+3x+4>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+5x\le 0, \\ 7+x>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

14. Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{-x^2+x+30}+\dfrac{1}{x-1}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-x-42}+\sqrt{100-x^2}$.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство: а) $-4\le x^2-5x+2\le -2$; б) $-1<x^2+2x<3$.

16. При каких значениях действительного параметра m неравенство выполнено для любых действительных значений: а) $5x^2-x+m>0$; б) $mx^2-10x-5<0$?

17. При каких значениях действительного параметра a неравенство не имеет решений:

а) $x^2+ax+1<0$; б) $ax^2+4ax+5\le 0$?

Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $x+2\ge 2{,}5x-1$; б) $x-\dfrac{x+4}{4}+\dfrac{3x-1}{2}<3$.

2. Найдите наименьшее натуральное число, принадлежащее множеству решений неравенства $3x-2<1{,}5x+4$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: а) $x^2+3x+2>0$; б) $2x<x^2$; в) $4x^2<1$; г) $(x-3)(x+7)\ge 0$; д) $x^2-x+3>0$; е) $\dfrac{x-5}{3x+3}\le 0$.

Формируем способности и применяем

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств: а) $\begin{cases} x-4>5-2x, \\ 3-2x<7+x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10x-2>4x+1, \\ 2x-\dfrac{2}{3}>\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее области определения функции, заданной формулой $f(x)=\sqrt{4+x+\dfrac{3}{x}}$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(x-4)^2+12\ge(3x-2)^2$; б) $3x(x+\sqrt{3})\le(x+\sqrt{3})^2$; в) $\dfrac{(x-2)(x^2+4)}{3x+1}\le 0$; г) $\dfrac{7x}{3x-4}\ge 1$.

7. При каких значениях x значения функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2-14x+20$, больше соответствующих значений функции $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x-16$?

8. Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

$\dfrac{x^2-6x+8}{x-5}\ge 0$	$2\dfrac{4}{7}$
$\dfrac{x+3}{10x-x^2-16}\le 0$	?

Развиваем способности и творим

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств: а) $\begin{cases} x-2>5x-\dfrac{x-3}{2}, \\ |3x+2|<10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-2|\ge 6, \\ |x-5|\le 3. \end{cases}$

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство $1<\frac{7x-2}{2x+1}<3$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\frac{|x+1|}{x^2+4x-12}\geq 0$.

12. При каких значениях действительного параметра a неравенство $ax^2-8ax+3a+7\geq 0$ не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$?

13. При каких значениях действительного параметра a неравенство $(a^2-1)x^2+2(1-a)x+2\geq 0$ выполняется для любых $x\in\mathbb{R}$?

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Даны выражения $E_1=\frac{2x-5}{3}$ и $E_2=-\frac{4x+1}{5}$.

а) Найдите действительные значения x, при которых $E_1<E_2$. **4 б**

б) Найдите действительные значения x, при которых сумма выражений E_1 и E_2 является неотрицательным числом. **4 б**

в) Решите на $\mathbb{R}$ систему $\begin{cases} E_1>0, \\ E_2\leq 0. \end{cases}$ **5 б**

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n=7n+2$. Докажите, что последовательность (a_n) возрастающая. **4 б**

3. Даны функции
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x^2+x-3$, и
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+5$.

а) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно: „Функция g принимает положительные значения при $x\in(5,+\infty)$“. **2 б**

И **Л**

б) Найдите $x\in\mathbb{R}$, при которых $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$. **7 б**

4. Условия одноразового посещения одного бассейна: стоимость 1 часа – 20 леев; минимальная сумма, которую должен потратить клиент – 40 леев. Условия одноразового посещения другого бассейна: стоимость 1 часа – 15 леев; минимальная сумма, которую должен потратить клиент – 60 леев. Через сколько часов посещение второго бассейна станет выгоднее, чем посещение первого бассейна? **6 б**

II вариант

1. Даны выражения $M_1=\frac{1-3x}{2}$ и $M_2=\frac{2x+3}{7}$.

а) Найдите действительные значения x, при которых $M_1<M_2$.

б) Найдите действительные значения x, при которых разность M_1-M_2 является неотрицательным числом.

в) Решите на $\mathbb{R}$ систему $\begin{cases} M_1\leq 0, \\ M_2>0. \end{cases}$

2. Последовательность (b_n) задана формулой $b_n=-3n+1$. Докажите, что последовательность (b_n) убывающая.

3. Даны функции
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+6$, и
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=3x^2-8x-3$.

а) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно: „Функция f принимает отрицательные значения при $x\in(6,+\infty)$“.

И **Л**

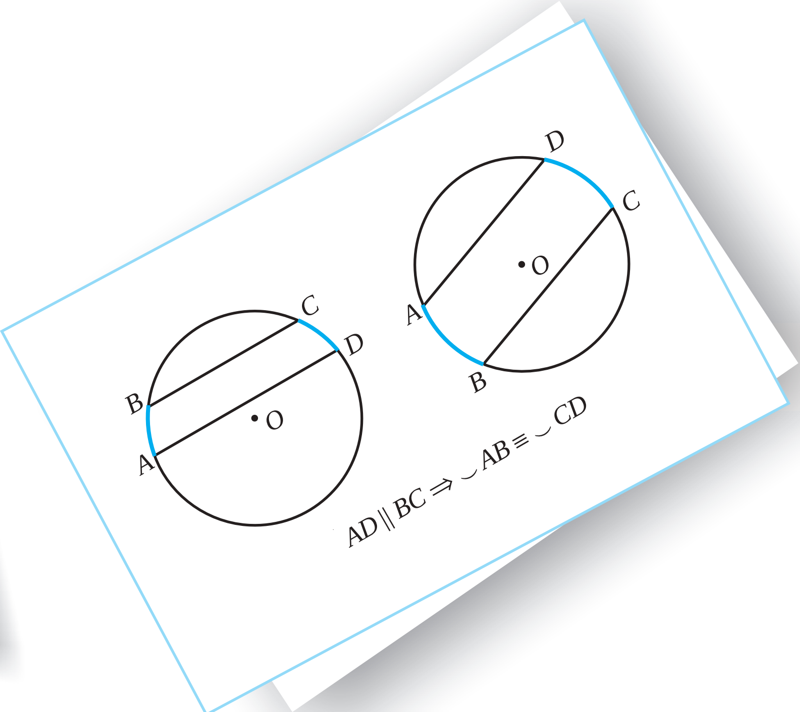
б) Найдите $x\in\mathbb{R}$, при которых $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$.

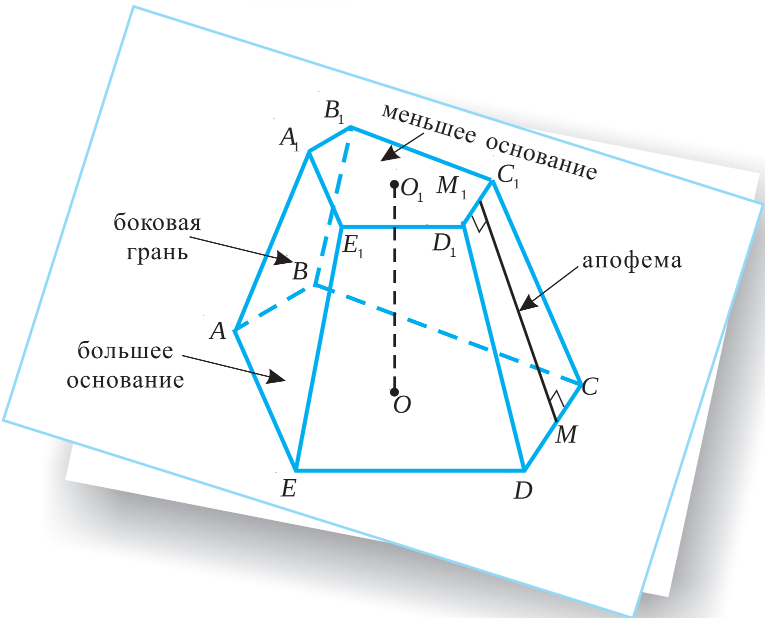
4. Условия подключения к интернету фирмой „Moldnet“: 240 леев за установку и 150 леев – ежемесячная оплата за обслуживание. Условия подключения к интернету фирмой „Supernet“ (при той же скорости интернета): 300 леев за установку и 140 леев – ежемесячная оплата за обслуживание. Через сколько месяцев после подключения предложение фирмы „Moldnet“ станет более выгодным?

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	32–30	29–27	26–24	23–20	19–15	14–10	9–7	6–4	3–2	1–0

ГЕОМЕТРИЯ


B
C
D
O
A
D
C
O
A
B
AD || BC ⇒ ◡AB ≡ ◡CD


B1
A1
меньшее основание
O1
M1
C1
боковая грань
E1
D1
B
апофема
A
большее основание
O
C
M
E
D

Глава

1 Повторение и дополнение

§1. Точки, прямые, плоскости, углы

1.1. Взаимные расположения на плоскости

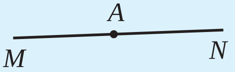
✓ ***Две точки***

Точки совпадают	Точки различны
$A \bullet B$	$A \bullet \qquad \bullet B$
Обозначаем: $A = B$.	*Обозначаем*: $A \neq B$.

Точка – это самая простая геометрическая фигура. Все геометрические фигуры состоят из точек.
Геометрическая фигура – это множество точек.
Часть прямой AB, ограниченная точками A и B, называется ***открытым отрезком*** и обозначается (AB). Точки A и B называются ***концами*** отрезка.
Замкнутый отрезок AB обозначается как $[AB]$ и состоит из (AB) и точек A, B.

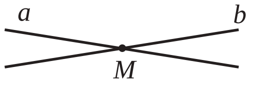
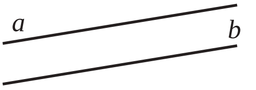
✓ ***Точка и прямая***

Точка принадлежит прямой	Точка не принадлежит прямой
	
Обозначаем: $A \in d$.	*Обозначаем*: $A \notin d$.



Три или более точек, лежащих на одной прямой, называются ***коллинеарными точками***.
Если точка A принадлежит прямой d, то она делит эту прямую на две ***дополнительные*** (или ***противоположные***) ***полупрямые***.
На рисунке точка A называется ***началом*** дополнительных полупрямых $(AM$ и $(AN$.
Полупрямая, не содержащая своего начала, называется ***открытой***. Полупрямая $[AM$ – ***замкнутая***, а полупрямая $(AM$ – ***открытая***.

✓ *Две прямые*

Прямые совпадают	Прямые пересекаются	Прямые параллельны
		
Обозначаем: $a = b$	*Обозначаем*: $a \cap b = \{M\}$	*Обозначаем*: $a \parallel b$

✓ *Пересечение двух параллельных прямых секущей*

Параллельные прямые a и b образуют с секущей c следующие пары углов (рис. 1):

а) *конгруэнтные*:

- внутренние, накрест лежащие: $\angle 3,\ \angle 6$; $\angle 4,\ \angle 5$

- внешние, накрест лежащие: $\angle 1,\ \angle 8$; $\angle 2,\ \angle 7$

- соответственные: $\angle 1,\ \angle 5$; $\angle 2,\ \angle 6$; $\angle 3,\ \angle 7$; $\angle 4,\ \angle 8$

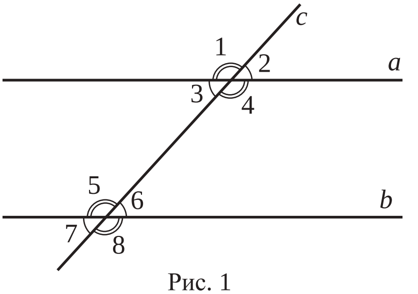


Рис. 1

б) *дополнительные до* $180°$ (то есть, сумма их величин равна $180°$):

- внутренние односторонние: $\angle 3,\ \angle 5$; $\angle 4,\ \angle 6$

- внешние односторонние: $\angle 1,\ \angle 7$; $\angle 2,\ \angle 8$

Чтобы утверждать, что две прямые, пересеченные секущей, – параллельны, достаточно убедиться, что одна из приведенных выше пар углов обладает соответствующим свойством (то есть, углы являются конгруэнтными или дополнительными до $180°$).

Задание. Прямые d_1 и d_2 – параллельны (рис. 2). Найдите неизвестные величины углов (x, y, z, t, u, v, w).

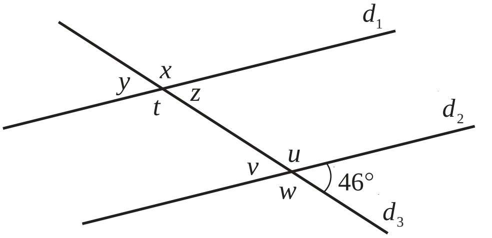
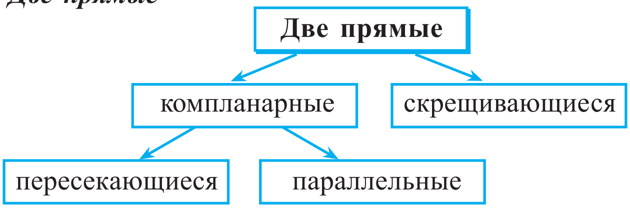


Рис. 2

1.2. Взаимные расположения в пространстве

✓ ***Две прямые***



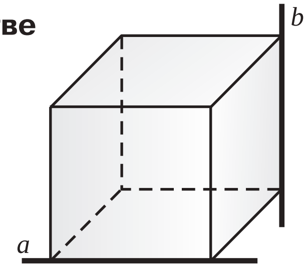
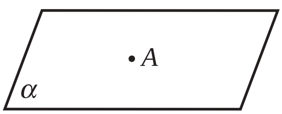
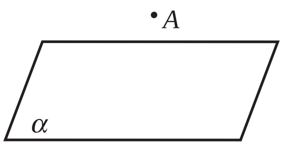


Рис. 3

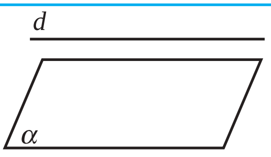
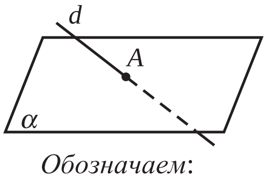
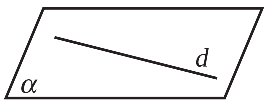
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются ***некомпланарными*** или ***скрещивающимися***.

На рисунке 3 прямые a и b (которые содержат два ребра разных граней куба) являются скрещивающимися.

✓ ***Точка и плоскость***

Точка, принадлежащая плоскости	Точка, не принадлежащая плоскости
	
Обозначаем: $A \in \alpha$	*Обозначаем*: $A \notin \alpha$

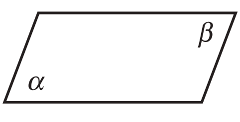
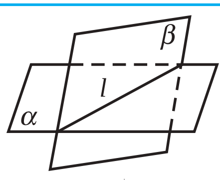
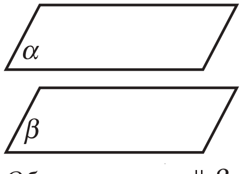
✓ ***Прямая и плоскость***

Прямая параллельна плоскости	Прямая пересекает плоскость	Прямая лежит в плоскости
		
Обозначаем: $d \parallel \alpha$ или $d \cap \alpha = \varnothing$.	*Обозначаем*: $d \cap \alpha = \{A\}$.	*Обозначаем*: $d \subset \alpha$.

Определение

Прямая параллельна плоскости, если она не имеет общих точек с плоскостью.

✓ ***Две плоскости***

Плоскости совпадают	Плоскости пересекаются	Плоскости параллельны
		
Обозначаем: $\alpha = \beta$.	*Обозначаем*: $\alpha \cap \beta = l$.	*Обозначаем*: $\alpha \parallel \beta$.

Определение
Две **плоскости параллельны**, если они не имеют ни одной общей точки.

Заметим, что пересечением двух плоскостей является прямая. Значит, две плоскости не могут иметь лишь одну общую точку, лишь две общие точки, лишь три общие точки и т. д.

Теорема
Если точка принадлежит разным плоскостям α и β, то эти плоскости имеют одну общую прямую.

• Какой формы будет линия разреза в каждом случае (рис. 4), если плоскость α „разрезать” соответствующим ножом под углом 45°? Обоснуйте.

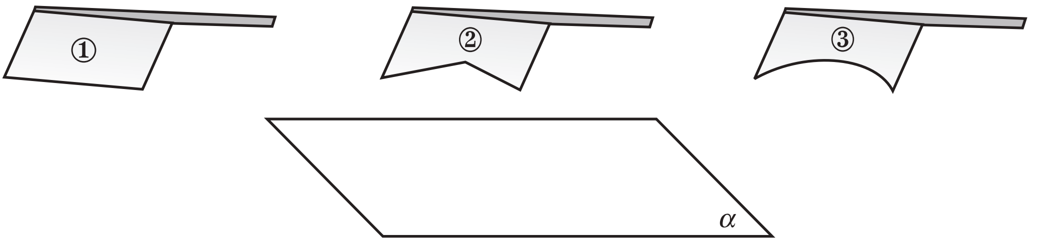
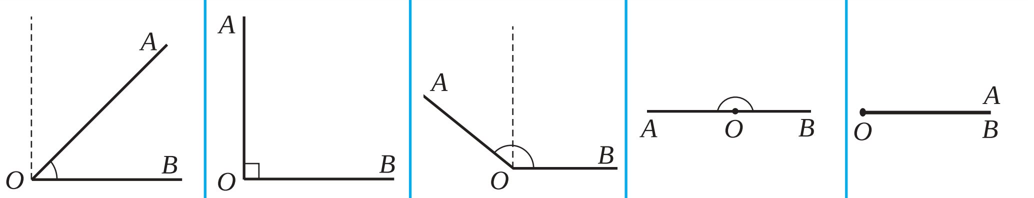


Рис. 4

1.3. Углы

✓ ***Угол***



Острый угол	Прямой угол	Тупой угол	Развернутый угол	Нулевой угол
Обозначаем: $m(\angle AOB)<90^\circ$.	*Обозначаем*: $m(\angle AOB)=90^\circ$.	*Обозначаем*: $m(\angle AOB)>90^\circ$.	*Обозначаем*: $m(\angle AOB)=180^\circ$.	*Обозначаем*: $m(\angle AOB)=0^\circ$.

Развернутые и нулевые углы называются ***несобственными углами***, все другие углы называются ***собственными***.

Два собственных угла называются ***смежными углами***, если у них общая вершина, общая сторона, а две другие стороны расположены по разные стороны от общей стороны.

Углы AOB и BOC – смежные (рис. 5).

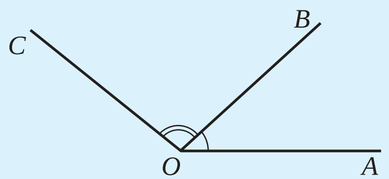
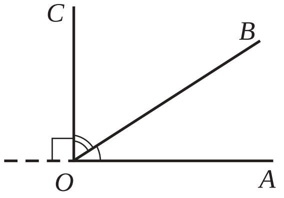
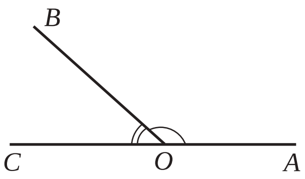
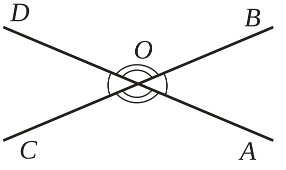
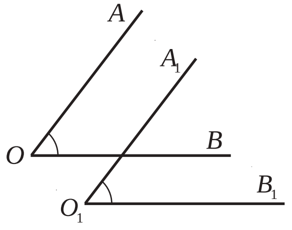
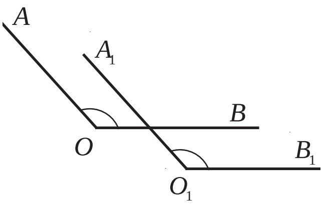
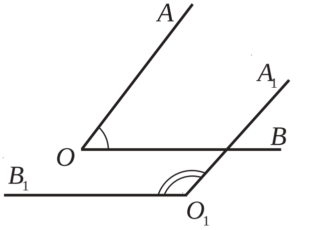


Рис. 5

✓ ***Два угла с общей вершиной*** (особые случаи)

Углы смежные, дополнительные до 90°	Углы смежные, дополнительные до 180°	Вертикальные углы
		
$m(\angle AOB)+m(\angle BOC)=90^\circ$	$m(\angle AOB)+m(\angle BOC)=180^\circ$	$\angle AOB\equiv\angle COD$ $\angle AOC\equiv\angle BOD$

✓ ***Два угла с соответственно параллельными сторонами***

		
$\angle AOB\equiv\angle A_1O_1B_1$	$\angle AOB\equiv\angle A_1O_1B_1$	$m(\angle AOB)+m(\angle A_1O_1B_1)=180^\circ$

Упражнения и задачи

Закрепляем знания

1. Прочтите:

а) $A\in b,\ M\notin c,\ \{N\}=b\cap c$;

б) $d\subset\beta,\ [MN]\subset\alpha,\ a\cap b=\{K\}$;

в) $MN>AB,\ A\notin\alpha,\ l\subset\alpha$;

г) $d\parallel l,\ AB\perp m,\ \{A, B, C\}\subset\beta$.

2. Выполните рисунок, соответствующий каждому случаю пунктов а)–г) упражнения **1**.

3. Выберите математические высказывания и установите их истинность:

а) „Яблоко – это овощ“.

б) „Циркуль – это геометрическая фигура“.

в) „Урок длится 45 мин“.

г) „Для любой прямой существуют точки, принадлежащие ей“.

д) „Два конгруэнтных отрезка имеют равные длины“.

4. Сформулируйте отрицание каждого из высказываний упражнения **3**.

5. Величина одного из 4 углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, равна 36°. Найдите величины остальных углов.

6. Вычислите величины двух углов:

а) вертикальных и дополнительных до 90°;

б) дополнительных до 180°, зная, что величина одного из углов на 30° меньше другого;

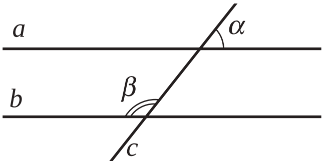
в) дополнительных до 90°, зная, что величина одного из углов в 9 раз больше другого;

г) конгруэнтных и смежных, зная, что величина угла, образованного их биссектрисами, равна 70°.

7. Даны параллельные прямые a и b.

Найдите величины углов, образованных при пересечении прямых a и b секущей c, если:

а) $\alpha = 41°$; б) $\beta = 108°$; в) $\beta - \alpha = 32°$.

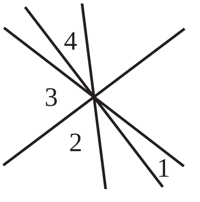


8. Сформулируйте из данных выражений истинные высказывания вида „ Если …, то… ”

- два угла вертикальны
- две компланарные прямые не пересекаются
- при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы конгруэнтны
- они параллельны
- они конгруэнтны
- две прямые перпендикулярны третьей
- два угла, образованные двумя параллельными прямыми с секущей, являются соответственными
- величины двух углов равны
- они пересекаются
- расстояние между двумя разными прямыми равно нулю
- они дополнительны до 180°
- два угла прямые

9. Рассмотрите рисунок. Известно, что $\angle 1 = 15°$, $\angle 3 = 75°$, а угол 2 в два раза больше угла 4.

Найдите величину угла 4.



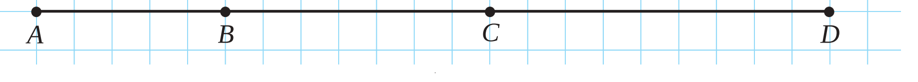
Формируем способности и применяем

10. Точки A, B, C расположены на прямой в данном порядке и $AB : BC = 5 : 3$.

Найдите: а) $\frac{AB}{AC}$; б) $\frac{AC}{BC}$.

11. Рассмотрите рисунок и вычислите отношение длин отрезков:

а) AB и CD; б) AC и AD; в) BC и BD; г) AD и AB.



12. Точка C принадлежит отрезку AB так, что $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$. Найдите отношение:

а) $\frac{AB}{AC}$; б) $\frac{BC}{AB}$; в) $\frac{AB}{AB - BC}$; г) $\frac{AB - AC}{AB + BC}$.

13. Вычислите:

а) длину отрезка MN, если отношение длин отрезков MN и KP равно 2,4 и KP = 4 см;

б) длину отрезка KP, если отношение длин отрезков MN и KP равно 4,2 и MN = 21 см;

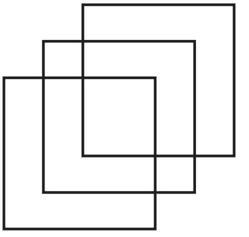
в) отношение длин отрезков MN и KP, если $[MN]$ в 3 раза короче, чем $[KP]$.

14. Разделите отрезок длиной 12 см на 3 отрезка пропорционально числам 1, 2, 3.

15. Разделите отрезок длиной 13,5 см на 3 отрезка пропорционально числам 2, 4, 3.

16. Сформулируйте высказывания, обратные полученным высказываниям из упражнения **14**. Установите их истинность.

17. На прямой отметили 10 равноудаленных друг от друга точек так, что первая и последняя точки определяют отрезок длины x. На другой прямой аналогичным образом (на таком же расстоянии друг от друга) отметили 100 точек так, что первая и последняя точки образуют отрезок длины y. Во сколько раз x меньше y?



18. Можно ли построить изображенную фигуру, не отрывая карандаша и не проводя дважды по одному и тому же отрезку?

19. Докажите, приведя контрпримеры, что следующие высказывания являются ложными:

а) „Любое число вида $\sqrt{a}$, где $a \in \mathbb{N}$, является иррациональным“.

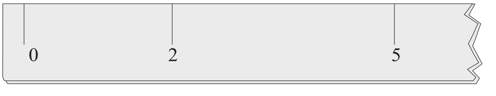
б) „Результат деления любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом“.

в) „Если секущая образует с прямыми a и b четыре угла величиной 70°, а другие четыре угла – величиной 110°, то прямые a и b параллельны“.

г) „Любое рациональное число можно записать в виде дроби единственным образом“.

Развиваем способности и творим

20. На линейке указаны деления 0 см, 2 см, 5 см. Как с помощью данной линейки построить отрезок длиной 6 см?



21. Как от провода длиной $\frac{2}{3}$ м отрезать 50 см, не используя измерительных приборов?

22. Разделите квадрат на два:

а) конгруэнтных четырехугольника, у каждого из которых по 2 разные стороны;

б) конгруэнтных пятиугольника;

в) конгруэнтных шестиугольника.

§ 2. Многоугольники

2.1. Элементы треугольника. Классификация треугольников

• Рассмотрите рисунки 6–8 и дополните так, чтобы получить истинные высказывания.

а) Стороны треугольника XYZ – ______ .

б) $[YB]$ – биссектриса треугольника XYZ, так как ______ .

в) $[YH]$ – высота треугольника XYZ, так как ______ .

г) Отрезок ______ является ______ треугольника XYZ, так как $XM = MZ$.

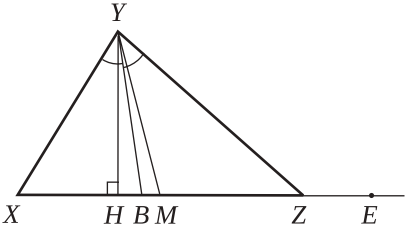


Рис. 6

д) Треугольник XYZ является ____, так как $XY \neq YZ$, $XZ \neq YZ$, $XY \neq XZ$.
Треугольник XYZ является ____, так как все его углы острые.

е) Угол YZE – ____ угол треугольника XYZ и
$m(\angle YZE) = m(\angle X) +$ ____.

ж) Треугольник ISO является ____, так как
$IS = SO$.
Следовательно, углы ____ – конгруэнтны.
Треугольник ISO является ____, так как
$m(\angle S) > 90°$.

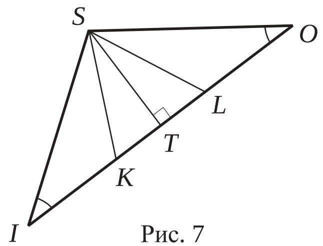


Рис. 7

з) ____ – медиана, ____ – биссектриса и ST – высота треугольника ISO.

и) ____ – катеты и $DR^2 =$ ____ – ____ прямоугольного треугольника DRE .

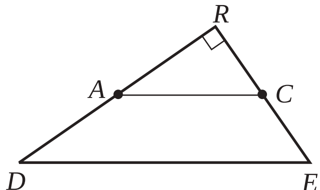


Рис. 8

к) $[AC]$ – средняя линия треугольника DRE, так как
____ $= AD$ и $RC =$ ____.
Следовательно, $2AC =$ ____ и $AC \parallel$ ____.

2.2. Конгруэнтность и подобие треугольников

Определение
Два **треугольника** называются **конгруэнтными**, если стороны и углы одного треугольника соответственно конгруэнтны сторонам и углам другого.

Обозначение $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ читается: „Треугольники ABC и DEF конгруэнтны”.

Задание. Треугольники TRI и UNG конгруэнтны. Дополните: $[IT] \equiv$ ____, $[UN] \equiv$ ____, ____ $\equiv [NG]$, ____ $\equiv \angle R$, $\angle T \equiv$ ____, ____ $\equiv$ ____.

	Признаки конгруэнтности треугольников
СУС	Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники **конгруэнтны**.
УСУ	Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно конгруэнтны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники **конгруэнтны**.
ССС	Если три стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники **конгруэнтны**.

Задача. Используя признаки конгруэнтности, найдите пары конгруэнтных треугольников (рис. 9), если:

$AB = DC,\ \ AD = BC,$

$AC = FE,\ \ AF = CE,$

$\angle HAC \equiv \angle GEF,$

$\angle BCF \equiv \angle GFC,$

$\angle ACB \equiv \angle EFG.$

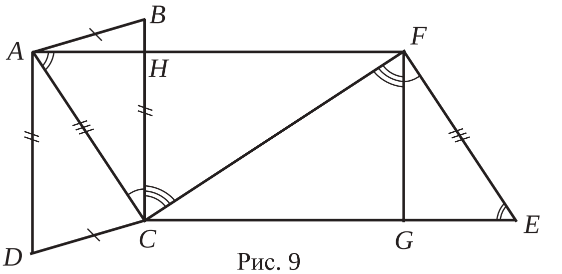


Рис. 9

Определение

Два **треугольника** называются **подобными**, если их углы соответственно конгруэнтны, а стороны соответственно пропорциональны.

Обозначение $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ читается: „Треугольники ABC и DEF подобны ”.

Задание. Треугольники TRI и UNG подобны. Дополните:

$\dfrac{TR}{\square} = \dfrac{TI}{UG} = \dfrac{\square}{\square}$, $\quad \angle T \equiv \square$, $\quad \square \equiv \angle R$, $\quad \square \equiv \square$.

	Признаки подобия треугольников
УУ	Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
СУС	Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами конгруэнтны, то такие треугольники подобны.
ССС	Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Задание. Сформулируйте признаки подобия для прямоугольных треугольников.

Задача. Используя признаки подобия, найдите пары подобных треугольников (рис. 10), если:

$BF \parallel CE,\ \ \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{BD}{HF},\ \ \dfrac{AB}{DF} = \dfrac{AF}{DE},$

$\angle A \equiv \angle EDF,\ \ \angle BCD \equiv \angle HGF.$

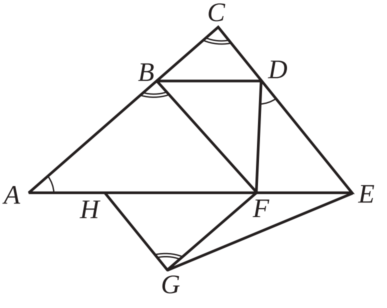


Рис. 10

Фалеса

Если прямая, не содержащая ни одной из вершин треугольника, параллельна одной из сторон треугольника, то отрезки, образованные этой прямой и прямыми, содержащими две другие стороны треугольника, пропорциональны (рис. 11):

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ d \parallel AC \\ d \cap AB = \{A_1\} \\ d \cap BC = \{C_1\} \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1A}{A_1B} = \frac{C_1C}{C_1B}.$$

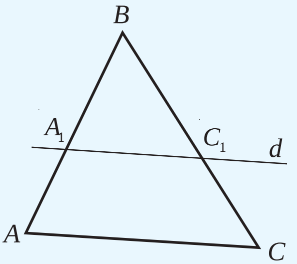


Рис. 11

Задание. Сформулируйте теорему Фалеса для треугольника *TRI* (рис. 12), если $l \parallel TI$.

Задача. Высказывание, обратное теореме Фалеса, также является теоремой. Сформулируйте теорему, обратную теореме Фалеса.

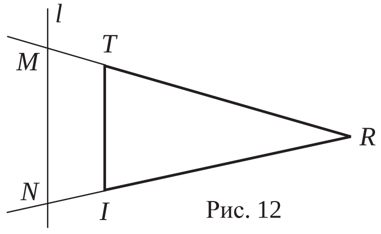


Рис. 12

2.3. Соотношения между элементами треугольника

Теоремы об элементах прямоугольного треугольника

Теорема высоты

Квадрат высоты, проведенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равен произведению длин проекций катетов на гипотенузу (рис. 13):

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

Теорема катетов

Квадрат любого катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и длины проекции этого катета на гипотенузу (рис. 13):

$$AB^2 = BC \cdot BD, \qquad AC^2 = BC \cdot CD.$$

Теорема Пифагора

Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин катетов (рис. 13):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

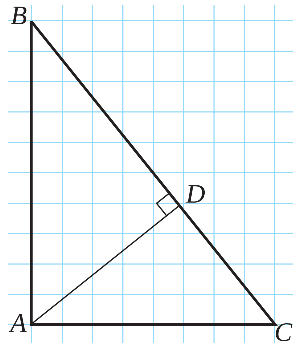


Рис. 13

Задачи. Применив теоремы, связанные с прямоугольным треугольником, вычислите неизвестные величины (рис. 14).

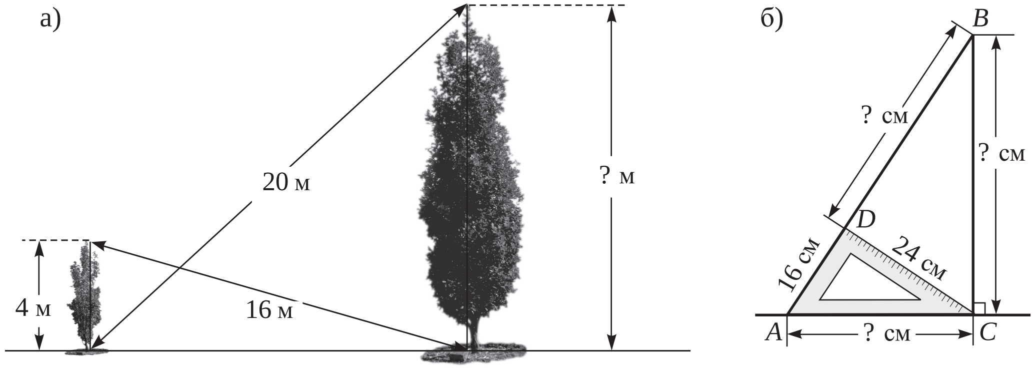


Рис. 14

> **Теорема биссектрисы** (дополнительный материал)
> Любая биссектриса треугольника делит сторону, противолежащую вершине, из которой проведена биссектриса, на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам треугольника (рис. 15):
> $$\frac{BM}{AB} = \frac{MC}{AC}.$$

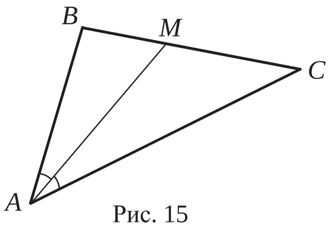
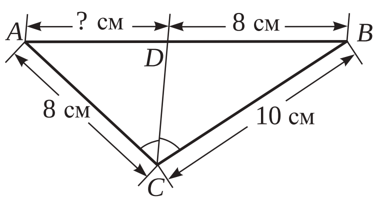


Рис. 15

Задача. Применив теорему биссектрисы, вычислите неизвестную длину.



2.4. Четырехугольники

1 Рассмотрите рисунок 16 и заполните пропуски, чтобы получить истинные высказывания.

а) ______ – стороны четырехугольника $PATR$.

б) ______ – углы четырехугольника $PATR$.

в) Сумма величин углов четырехугольника $PATR$ равна ______.

г) Если периметр четырехугольника $PATR$ равен 49 см, $PA + TR = 21$ см и сторона PR на 2 см длиннее, чем сторона AT, то $AT =$ ______ см.

д) Если $PA \parallel TR$, а $AT \nparallel PR$, то $PATR$ является ______.

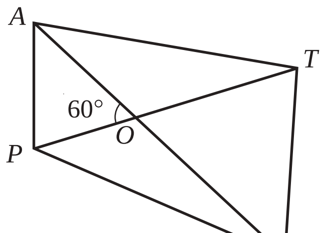
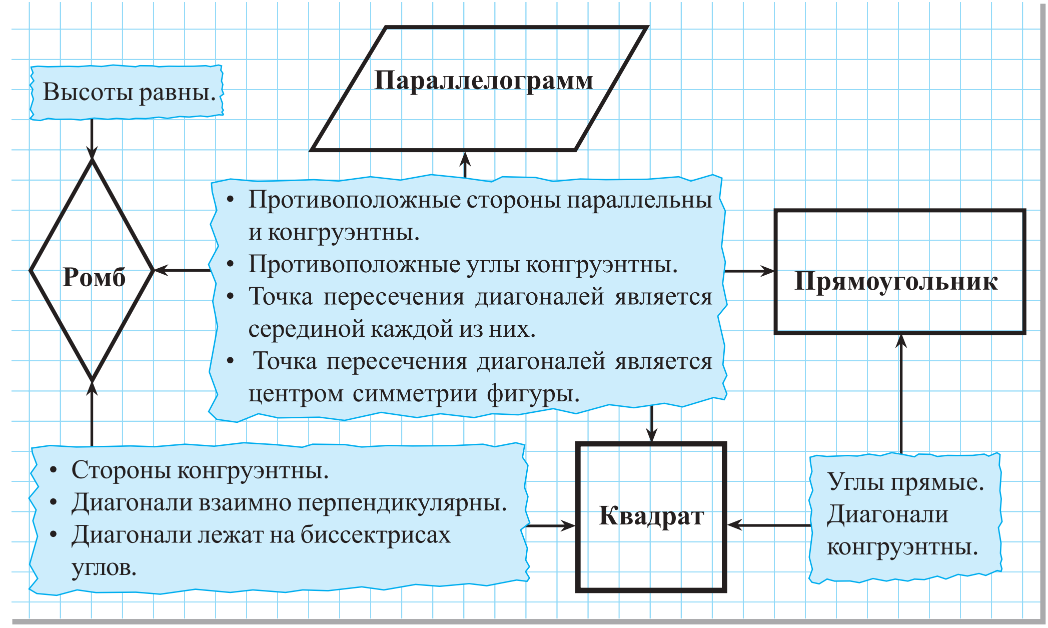


Рис. 16

2 Рассмотрите диаграмму и заполните пропуски, чтобы получить истинные высказывания.



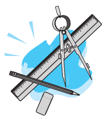
а) Ромб – это параллелограмм ______.

б) Квадрат – это ромб ______.

в) Квадрат – это прямоугольник ______.

г) ______ – это параллелограмм, у которого углы прямые.

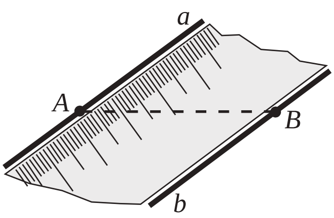
д) ______ – это четырехугольник, у которого углы прямые.



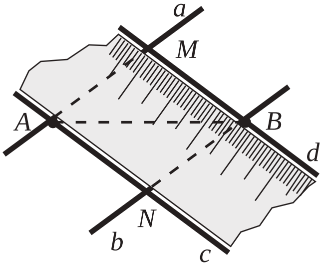
Задача на построение

Построим при помощи линейки (без делений) медиатриссу заданного отрезка AB.

Решение:



① Пусть дан отрезок AB.
Зафиксируем линейку так, чтобы границы линейки достигали концов отрезка AB, и построим параллельные прямые a и b.



② Зафиксируем линейку в другом положении, но так, чтобы границы линейки опять достигали концов отрезка AB, и построим параллельные прямые c и d.
Обозначим: $\{M\}=a\cap d$ єi $\{N\}=b\cap c$.

③ Четырехугольник $AMBN$ является ромбом. Следовательно, $[MN] \perp [AB]$, и точка их пересечения является серединой каждого из них. Значит, MN является медиатриссой отрезка AB (рис. 17).

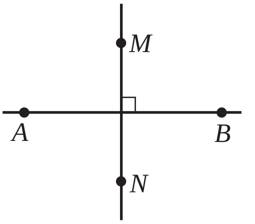


Рис. 17

Замечание. Данный алгоритм можно использовать в случае, когда длина отрезка AB больше ширины линейки и меньше ее длины. Почему?

Задание. Зная, что диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов, постройте при помощи линейки без делений биссектрису заданного острого угла.

2.5. Многоугольник с n ($n > 4$) сторонами. Правильные многоугольники

Если любые две точки внутренней области многоугольника соединяются отрезком, который принадлежит внутренней области этого многоугольника, то многоугольник называется **выпуклым**, в противном случае – **невыпуклым многоугольником** (рис. 18).

Выпуклый многоугольник
а)

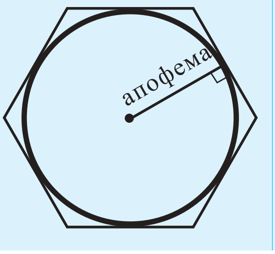
Невыпуклый многоугольник
б)

Рис. 18

• Перечертите и заполните таблицу:

	Число сторон	Число диагоналей, проведенных из одной вершины	Всего диагоналей	Сумма величин углов многоугольника
Пятиугольник	5			
	6			720°
Семиугольник			14	
Восьмиугольник				
Девятиугольник				
Десятиугольник	10			
Выпуклый n-угольник	n	$n-3$		

- Выпуклый многоугольник, у которого все стороны конгруэнтны и все углы конгруэнтны, называется **правильным многоугольником**.
- Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.
- В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. Радиус этой окружности называется **апофемой** правильного многоугольника.



Итак, равносторонний треугольник и квадрат являются правильными многоугольниками.

Упражнения и задачи

Закрепляем знания

1. Определите, существует ли треугольник, стороны которого равны (выраженные одной и той же единицей измерения):
а) 9, 10, 16; б) 8, 12, 20; в) $\sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{11}$; г) $\sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{14}$.

2. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации.
а) Точка M является серединой основания равнобедренного тупоугольного треугольника ABC.
б) Треугольники ABC и CMB являются равнобедренными и $AM \cap BC = \{D\}$.
в) Треугольники ABF и GDE являются равносторонними и $G \in [AF],\ F \in [GE]$.
г) $\Delta BAE \equiv \Delta DEA,\ [BE] \cap AD = \{C\}$.

3. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются медианами треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если:
а) $BC_1 = 9$ см, $BA_1 = 10$ см, $AB_1 = 12$ см; б) $BA_1 = 3\sqrt{5}$ см, $AC_1 = \sqrt{125}$ см, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ см.

4. Дан треугольник ABC. Угол A в 2 раза больше угла B и в 3 раза меньше угла C. Найдите величины углов треугольника.

5. Постройте треугольник со сторонами 6 см, 7 см, 8 см.

6. Постройте треугольник, у которого две стороны равны 8 см и 9 см, и угол между ними равен 45°.

7. Постройте треугольник со стороной 10 см и углами, прилежащими к ней, равными 30° и 80°.

8. Вычислите периметр треугольника:
а) равнобедренного, одна сторона которого равна 7 см, а другая 15 см;
б) равностороннего, средняя линия которого равна 12 см;
в) разностороннего, длины сторон которого являются натуральными последовательными четными числами, причем самая длинная сторона равна 28 см.

9. Вычислите: а) $31°40'29'' + 46°24'37''$; б) $118°27'35'' + 36°27'18''$;
в) $90° - 17°55'56''$; г) $142° - 72°34'56''$.

10. Точки M, N, K, P являются серединами сторон четырехугольника $ABCD$. Найдите длины сторон четырехугольника $MNKP$, если $AC = 20$ см, $BD = 24$ см.

11. Точка M_1 – ортогональная проекция точки M $(a,\ b)$ на ось абсцисс прямоугольной системы координат. Найдите координаты точки M_1, если:
а) $a = 3,\ b = -\sqrt{8}$; б) $a = -0{,}4,\ b = 2\sqrt{5}$.

12. Точка M принадлежит биссектрисе угла AOB. Найдите расстояние от точки M до полупрямой $[OA$, если расстояние от точки M до полупрямой $[OB$ равно:
а) $|\sqrt{7}-3|$ см; б) $|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$ см.

13. Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD. Точки X и Y – середины боковых сторон трапеции. Найдите:
а) XY, если $AD = 18$ см, $BC = 12$ см; б) BC, если $AD = 20$ см, $XY = 14$ см.

14. Вычислите величины внешних углов:
а) прямоугольного треугольника, один из углов которого равен 40°;
б) равнобедренного треугольника, один из углов которого равен 110°;
в) треугольника, один из углов которого равен 30°, а другой – 80°.

15. Медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке P.
Найдите: а) PM и PN, если $AP = 24$ см, $BP = 30$ см;
б) AP и BP, если $PM = \sqrt{6}$ см, $PN = \sqrt{7}$ см.

16. Величина одного из углов параллелограмма равна 55°. Найдите величины остальных углов параллелограмма.

17. Величина одного из углов ромба на 40° больше величины другого угла ромба. Найдите величины углов ромба.

18. Найдите величины углов равнобедренной трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD, если: а) $m(\angle A)+m(\angle D)=150°$; б) $m(\angle B)+m(\angle C)=210°$.

19. Найдите величины углов прямоугольной трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD, если: а) $BA\perp AD$, $m(\angle A)+m(\angle D)=150°$; б) $CD\perp AD$, $m(\angle B)+m(\angle C)=200°$.

20. Между какими числовыми последовательностями существует прямо пропорциональная зависимость? а) 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8; б) 2, 3, 4, 5 и 4, 6, 8, 10;
в) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ и 5, 6, 7; г) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ и 2,5; 2; 1.

21. Заполните таблицу таким образом, чтобы числа в первой строке были прямо пропорциональны числам во второй строке:

а)

4	6	10	12	
	18			27

б)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12

22. Определите, сколько всего диагоналей имеет правильный многоугольник, у которого:
а) 13 сторон; б) 15 сторон.

Формируем способности и применяем

23. Вычислите периметр равностороннего треугольника, средняя линия которого равна $\frac{9}{\sqrt{3}}$ см.

24. Вычислите величины углов, образованных при пересечении:
а) двух медиан равностороннего треугольника;
б) трех высот равностороннего треугольника.

25. Высота равностороннего треугольника, стороны которого касаются окружности, на 10 см больше радиуса этой окружности. Найдите эту высоту.

26. Высота равностороннего треугольника, стороны которого касаются окружности, на 12 см больше, чем радиус этой окружности. Найдите высоту треугольника.

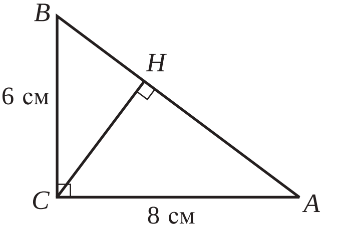
27. На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC взята точка D так, что $AC = CD$. Зная, что $AB = 4\sqrt{3}$ см, найдите:
а) углы треугольника BCD; б) BD.

28. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной около этого треугольника, на 17 см меньше, чем длина гипотенузы.

29. Если увеличим ширину прямоугольника на 8 см, то получим квадрат с периметром 96 см. Найдите периметр прямоугольника.

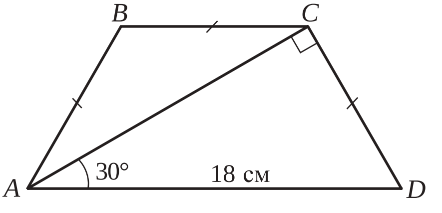
30. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если:
а) A (–2; 3), B (6; 4), C (5; –3); б) A (1; 1), B (–3; 3), C (–2; –1).

31. $[CM]$ является медианой, а $[CH]$ – высотой треугольника ABC с прямым углом C. Найдите $\frac{BH}{AH}$, если $\frac{CM}{CH} = \frac{5}{4}$.



32. Рассмотрите рисунок. Найдите AB, AH, BH, CH.

33. Вершины треугольника со сторонами 6 см, 8 см и 10 см находятся на одной окружности. Найдите радиус окружности.



34. Рассмотрите рисунок. Найдите AB и AC.

35. Диагональ равнобедренной трапеции делит пополам тупой угол трапеции. Найдите большее основание и высоту трапеции, если известно, что меньшее основание равно 3 см, а периметр трапеции равен 42 см.

36. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD. Найдите величины углов трапеции, если $[AC$ – биссектриса угла BAD и $AD = 2BC$.

Развиваем способности и творим

37. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите AB и BC, если известно, что периметр параллелограмма равен 80 м, а периметр треугольника AOD на 10 м больше периметра треугольника DOC.

38. Диагональ равнобедренной трапеции делит пополам тупой угол трапеции. Найдите периметр трапеции, если известно, что он на 18 см больше, чем большее основание, а средняя линия трапеции равна 5 см.

39. Стороны треугольника касаются окружности. Найдите радиус окружности, если известно, что стороны треугольника равны 5 см, 12 см и 13 см.

40. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB] \equiv [BC]$. Точки M и N принадлежат внешней области треугольника ABC так, что треугольники ABM и BCN – равносторонние. Докажите, что $MN \parallel AC$.

41. Сумма расстояний от вершин треугольника ABC до прямой d равна 30 см. Найдите сумму расстояний от середин сторон треугольника ABC до прямой d.

42. Точка O принадлежит внутренней области квадрата $ABCD$.
Докажите, что если $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15°$, то треугольник AOB – равносторонний.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. а) Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации: **2 р**
ΔACD, $m(\angle A) = 90°$, $B \in [AC]$,
$E \in [DC]$, $AB = BC = 3$ см,
$CE = ED = 5$ см.
б) Найдите BE. **2 р**
в) Дополните: $\Delta ACD \sim$ ______ . **2 р**
г) Найдите AD. **2 р**

2. Турист отправился в поход из точки A и прошел сначала 480 м на восток до точки B, потом 200 м на юг и достиг точки C.
а) На каком расстоянии от точки A находится турист? **2 р**
б) Найдите площадь треугольника ABC. **2 р**
в) Определите расстояние от точки B до прямой AC. **3 р**
г) За какое время турист пройдет расстояние CA, если он будет двигаться со скоростью 5,4 км/ч? **3 р**

3. Найдите количество диагоналей правильного многоугольника с 12 сторонами. **3 р**

4. Найдите периметр прямоугольной трапеции $ABCD$, если известно, что $m(\angle A) = 45°$, бóльшее основание равно 8 см и наибольшая боковая сторона равна $4\sqrt{2}$ см. **5 р**

II вариант

1. а) Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации: **2 р**
ΔMNK, $m(\angle M) = 90°$, $P \in [MN]$,
$R \in [NK]$, $MN = 2PN = 8$ см,
$NK = 2NR = 10$ см.
б) Найдите PR. **2 р**
в) Дополните: $\Delta PNR \sim$ ______ . **2 р**
г) Найдите MK. **2 р**

2. Турист отправился в поход из точки M и прошел сначала 600 м на север до точки N, потом 450 м на запад и достиг точки K.
а) На каком расстоянии от точки M находится турист? **2 р**
б) Найдите площадь треугольника MNK. **2 р**
в) Определите расстояние от точки N до прямой MK. **3 р**
г) За какое время турист пройдет расстояние KM, если он будет двигаться со скоростью 5,4 км/ч? **3 р**

3. Найдите количество диагоналей правильного многоугольника с 14 сторонами. **3 р**

4. Найдите периметр равнобедренной трапеции $ABCD$, если известно, что $m(\angle A) = 30°$, меньшее основание равно $2\sqrt{3}$ см и высота равна 1 см. **5 р**

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	26–25	24–22	21–19	18–16	15–14	13–10	9–7	6–4	3–2	1–0

Глава 2 Окружность

§1. Повторение и дополнение

1.1. Элементы окружности. Основные свойства

ВСПОМНИМ

1 Какую фигуру определяет множество:

а) точек, равноудаленных от концов заданного отрезка;

б) точек, расположенных на расстоянии 5 см от заданной точки.

Определения

- Пусть r – действительное положительное число и O – точка на плоскости. **Окружностью с центром** O **и радиусом** r называется множество всех точек плоскости, расположенных на расстоянии r от точки O. *Обозначаем*: $\mathscr{C}(O, r)$.
- Пусть $A \in \mathscr{C}(O, r)$. Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо ее точкой, называется **радиусом**.
- Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой.** Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.
- Точки A и B окружности называются **диаметрально противоположными**, если $[AB]$ является диаметром.

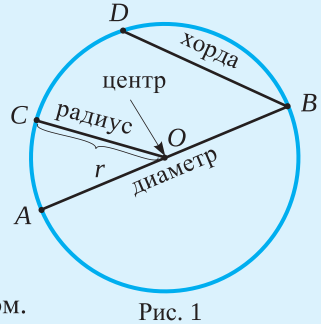


Рис. 1

• Вспомните определение конгруэнтных фигур и определите, какие из следующих окружностей конгруэнтны:
$\mathscr{C}_1(A, r = 3 \text{ см})$, $\mathscr{C}_2(B, r = 4 \text{ см})$, $\mathscr{C}_3(A, r = 4 \text{ см})$, $\mathscr{C}_4(B, r = 3 \text{ см})$.

2 Точка O – центр окружности (рис. 2). Назовите точки, расположенные от точки O на расстоянии:

а) равном радиусу окружности;

б) меньшем радиуса окружности;

в) большем радиуса окружности.

Какие из этих точек принадлежат внутренней области окружности?

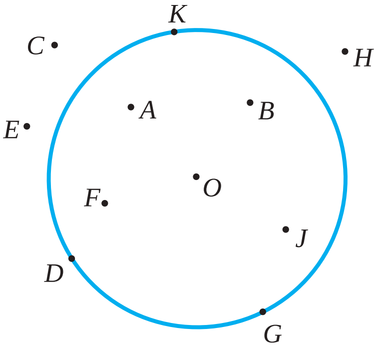


Рис. 2

Определения

- Дана окружность $\mathscr{C}(O,r)$. Множество точек M плоскости, для которых $OM < r$, называется **внутренней областью окружности**. *Обозначаем:* Int $\mathscr{C}(O,r)$.
- Множество точек N плоскости, для которых $ON > r$, называется **внешней областью** окружности. *Обозначаем:* Ext $\mathscr{C}(O,r)$.
- Окружность $\mathscr{C}(O,r)$, объединенная со своей внутренней областью, называется **кругом с центром** O **и радиусом** r. *Обозначаем*: $\mathscr{D}(O,r)$.
  Следовательно, $\mathscr{D}(O,r)=\mathscr{C}(O,r)\cup$ Int $\mathscr{C}(O,r)=\{M \mid OM \le r\}$.

3 *Докажите, что любые **три различные точки окружности** на рисунке 3 **неколлинеарны**.

Указание. Рассмотрите рисунок 3. Докажите методом от противного, что $C \notin AB$, где A, B, C – три произвольные различные точки окружности. Предположив, что $C \in AB$, рассмотрите прямоугольные треугольники ODB и ODC.

• Какое наибольшее количество общих точек может быть у прямой и окружности?

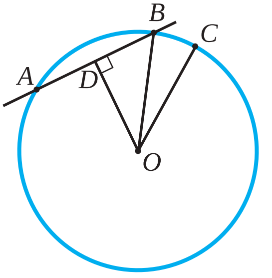


Рис. 3

ИССЛЕДУЕМ

4 Точка O – центр окружности (рис. 4).

Что можно сказать об отрезке OM и треугольнике AOB, если: а) $OM \perp AB$;

б) точка M – середина отрезка AB?

Сделайте вывод.

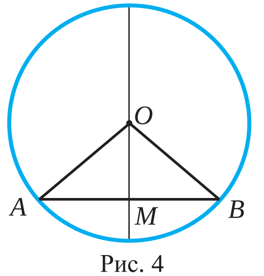


Рис. 4

Теорема 1

Если диаметр окружности проходит через середину хорды, то он перпендикулярен этой хорде.

• Сформулируйте высказывание, обратное теореме 1, которое также является теоремой.

• Докажите теорему 1 и обратную ей теорему.

Теорема 2

Если две хорды окружности конгруэнтны, то они равноудалены от центра этой окружности.

*Докажем теорему 2.

Условие: $\{A,B,C,D\}\subset\mathscr{C}(O,r)$, $[AB]\equiv[CD]$.

Заключение: $\mathrm{d}(O,[AB])=\mathrm{d}(O,[CD])$.

Доказательство:

① $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (признак ССС). Пусть точки M, N – середины отрезков AB и CD соответственно (рис. 5).

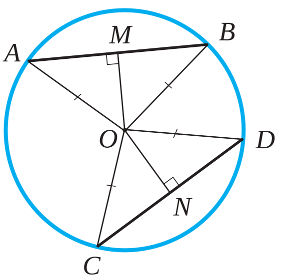


Рис. 5

* Дополнительный материал

② Отрезки $[OM]$ и $[ON]$ являются медианами и высотами треугольников AOB и COD. Согласно ①, $[OM] \equiv [ON]$.

③ $\mathrm{d}(O,[AB]) = OM = ON = \mathrm{d}(O,[CD])$, ч. т. д. ►

• Высказывание, обратное теореме 2, также является теоремой. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 2.

• Переформулируйте в одну теорему вида „*Условие* тогда и только тогда, когда *Заключение*“:

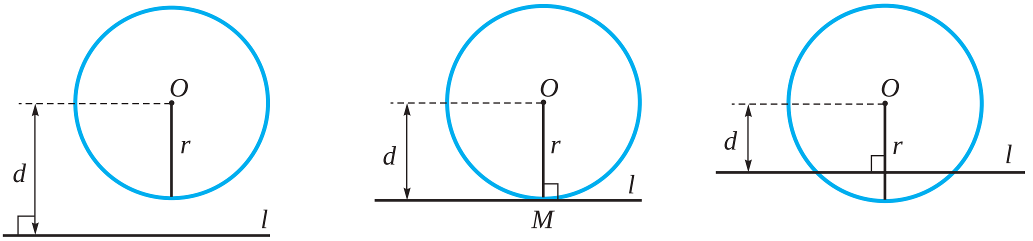
а) теорему 1 и теорему, обратную ей; б) теорему 2 и теорему, обратную ей.

• Применив теорему 1, объясните, как можно найти неизвестный центр заданной окружности.

1.2. Взаимное расположение прямой и окружности

ВСПОМНИМ

1 Точка O – центр окружности (рис. 6). Обратите внимание, как называется прямая l в каждом случае.



прямая, **не пересекающая** окружность

прямая, **касательная** к окружности; M – точка касания

прямая, **секущая** к окружности

Рис. 6

• Пусть d – расстояние от центра окружности $\mathscr{C}(O,r)$ до прямой l. Дополните так, чтобы получить истинные высказывания.

а) Прямая l ________ окружность $\mathscr{C}(O,r)$ тогда и только тогда, когда $d > r$.

б) Прямая l является касательной к окружности, тогда и только тогда, когда ________.

в) Прямая l является ________, тогда и только тогда, когда $d <$ ____.

Теорема 3

Если прямая является касательной к окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

*Докажем теорему 3.

Условие: $\mathscr{C}(O,r) \cap l = \{M\}$.

Заключение: $OM \perp l$.

* Дополнительный материал

Доказательство:

Применим метод от противного.

① Предположим обратное: $OM \not\perp l$.

Пусть перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой l, пересекает прямую l в точке A (рис. 7).

② Отметим точку $B \in l$, чтобы $[AB] \equiv [AM]$.

③ $\Delta OAB \equiv \Delta OAM$ (Признак КК).

④ Согласно ③, $[OB] \equiv [OM]$, то есть $[OB]$ – радиус. Следовательно, $B \in \mathscr{C}(O, r)$.

Теперь прямая l имеет две общие точки (M и B) с окружностью, что является противоречием.

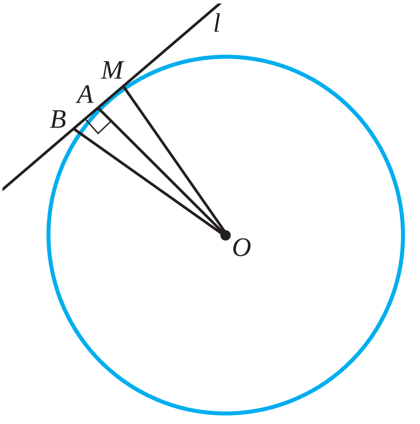


Рис. 7

Значит, предположение, что $OM \not\perp l$ было не верным, то есть $OM \perp l$. ►

Высказывание, обратное теореме 3, также является теоремой.

• Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 3.

2 *Задача на построение

Пусть точка M принадлежит окружности $\mathscr{C}(O, r)$ (рис. 8). Проведем касательную к этой окружности так, чтобы точка M была точкой касания.

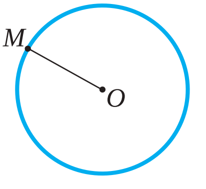


Рис. 8

Объясняем:

① Проведем радиус OM (рис. 9).

② Проведем перпендикуляр AB к прямой OM:

- отметим точку $O_1 \in OM$, чтобы $[O_1M] \equiv [OM]$;
- проведем окружности $\mathscr{C}_1(O, r_1)$ и $\mathscr{C}_2(O_1, r_1)$, где $r_1 > r$;
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$.

③ По теореме, обратной теореме 3, так как $AB \perp OM$ и $M \in \mathscr{C}(O, r)$, следует, что прямая AB является касательной к этой окружности в точке M.

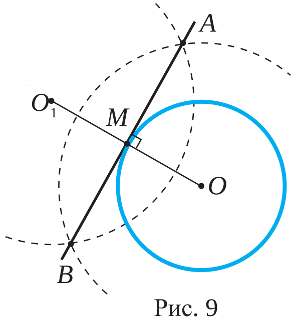


Рис. 9

Через любую точку окружности можно провести единственную прямую, касательную окружности в этой точке.

Задача. Докажите, что на рисунке 10:

а) $[AM] \equiv [BM]$;

б) $[MO$ – биссектриса угла AMB.

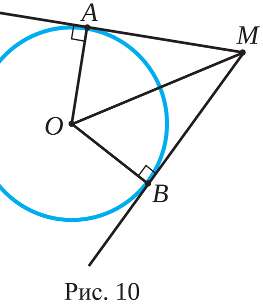


Рис. 10

- Две касательные, проведенные через точку, лежащую вне окружности, образуют два касательных отрезка, конгруэнтных между собой.
- Полупрямая с началом в той же точке, проходящая через центр окружности, является биссектрисой угла, образованного касательными.

* Дополнительный материал

Упражнения и задачи

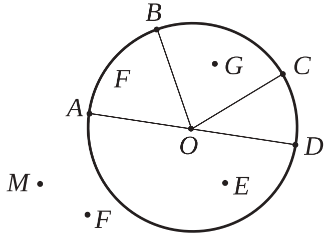
Фиксируем знания

1. Постройте и обозначьте окружность:

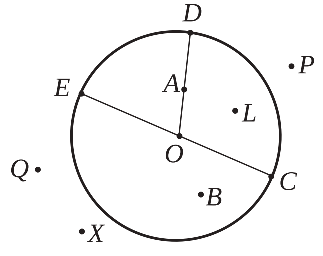
а) с центром A радиуса 4 см; б) с центром B радиуса 6 см.

2. На рисунке точка O – центр окружности. Назовите: радиусы; хорды; диаметры; точки, расположенные во внутренней области окружности; точки, расположенные во внешней области окружности; диаметрально противоположные точки.

а)



б)



3. Определите взаимное расположение точки A и $\mathscr{C}(O,\ r = 6\text{ см})$, если расстояние от точки A до точки O равно:

а) 6 см; б) $3\sqrt{5}$ см; в) 6,(6) см; г) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ см.

4. Хорды AB и CD равноудалены от центра окружности. Найдите AB, если:

а) $CD = 8$ см; б) $AB + CD = 14$ см; в) $AB + 2CD = 6\sqrt{10}$ см; г) $5AB + CD = 12$ см.

5. Диаметр AB пересекает хорду MN той же окружности радиуса R под прямым углом в точке E. Найдите расстояние от центра окружности до MN, если:

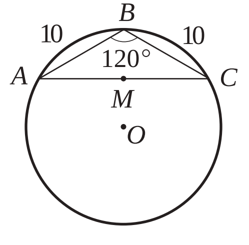
а) $ME = 9$ см, $R = 15$ см; б) $ME = 12$ см, $R = 13$ см; в) $4NE = 2R - 2\text{ см} = 32$ см.

6. Пусть d – расстояние от прямой l до центра окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Определите взаимное расположение прямой l и окружности, если:

а) $d = 3$ см, $r = 4$ см; б) $d = 6{,}3$ см, $r = 3\sqrt{5}$ см;

в) $d = r = 2{,}7$ см; г) $d = 0$ см, $r = \frac{4}{9}$ см;

д) $d = \sqrt{3-\sqrt{5}}$ см, $r = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ см.



7. Найдите радиус окружности и длины отрезков AC и BM, где точка M – середина отрезка AC.

8. Через точку M, лежащую вне окружности, проведены касательные к этой окружности. Точки A и B – точки касания. Найдите BM, если:

а) $AM = 13{,}7$ см; б) $AM - 2BM = -3{,}(4)$ см; в) $AB = 8$ см, $m(\angle AMB) = 60°$.

9. Серединный перпендикуляр ненулевого отрезка AB проходит через центр окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Определите взаимное расположение прямой AB и окружности, если:

а) $OA = 5$ см, $r = 6$ см; б) $OA = r = \frac{3}{4}$ см;

в) $OA = 14$ см, $r = 12\frac{1}{5}$ см и $AB = 12$ см; г) $OA = 15$ см, $r = 12$ см и $AB = 18$ см.

10. Дана окружность $\mathscr{C}(O, r)$. Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB, если:
а) $AB = 8$ см, $r = 5$ см; б) $AB = 24$ см, $r = 13$ см; в) $AB = a$, $r = b$.

11. Пусть $[AB]$ – хорда окружности $\mathscr{C}(O, r)$, а d – расстояние от центра окружности до этой хорды. Определите r, если:
а) $AB = 12$ см, $d = 8$ см; б) $AB = d = \sqrt{3}$ см.

12. Через точку, расположенную на расстоянии радиуса от окружности, проведены две касательные к этой окружности. Найдите величину угла между касательными.

13. Постройте окружность, зная, что длина любой хорды, проведенной в этой окружности, не больше 10 см.

14. Дана окружность $\mathscr{C}(O, r = 8$ см$)$ и ее хорда AB. Постройте с помощью угольника середину отрезка $[AB]$.

15. Расстояние между центром O окружности и хордой AB в два раза меньше радиуса окружности. Найдите $m(\angle ABO)$.

16. На расстоянии 6 см от центра окружности проведена хорда длиной $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности.

17. Каково взаимное расположение точки M и окружности $\mathscr{C}(O, r)$, если:
а) $OM = \frac{1}{2}r$; б) $OM = |2-\sqrt{5}|\, r$; в) $OM = \frac{2}{r}$?

Формируем способности и применяем

18. Через точку A, расположенную на расстоянии 29 см от центра окружности $\mathscr{C}(O, r)$, проведена касательная AB к окружности (B – точка касания). Найдите радиус окружности, если $AB = 21$ см.

19. Пусть $A \in \operatorname{Ext} \mathscr{C}(O, r = 5$ см$)$ и $C \in \mathscr{C}(O, r)$, AC – касательная к окружности. Найдите OA, если $m(\angle OAC) = 30°$.

20. Пусть $M \in \operatorname{Ext} \mathscr{C}(O, r = 3{,}5$ см$)$ и $A \in \mathscr{C}(O, r)$, AM – касательная к окружности. Найдите OM, если $m(\angle AMO) = 30°$.

21. Пусть $M \in \operatorname{Ext} \mathscr{C}(O, r)$ и $A \in \mathscr{C}(O, r)$, AM – касательная к окружности. Найдите радиус окружности, если $m(\angle AMO) = 45°$ и $AM = 7{,}5$ см.

22. Пусть $M \in \operatorname{Ext} \mathscr{C}(O, r = \sqrt{15}$ см$)$ и $A \in \mathscr{C}(O, r)$, AM – касательная к окружности. Точка N – середина отрезка OM. Найдите AN, если $m(\angle AOM) = 60°$.

23. ***Математика в жизни.*** Михаил построил окружность и стер ее центр. Как можно найти центр этой окружности?
Указание. Примените теорему 1 (стр. 142) и свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

24. Пусть AM – касательная к окружности $\mathscr{C}(O, R)$ в точке A. Найдите расстояние от точки O до точки M, если: а) $AM = 0{,}8$, $r = 0{,}6$; б) $AM = 24$, $r = 18$; в) $AM = x$, $r = y$.

25. Докажите, что середины конгруэнтных хорд лежат на одной окружности.
Указание. Примените теорему 2 (стр. 142).

26. Окружности $\mathscr{C}(O, r)$ и $\mathscr{C}(O_1, r)$ пересекаются в точках M и N. Найдите OO_1, если $MO = 13$ см, $MO_1 = 6$ см, $MN = 10$ см.

27. Постройте окружность радиуса r, проходящую через точки A и B, если:
а) $AB = 5$ см, $r = 6$ см;
б) $AB = \sqrt{15}$ см, $r = 5$ см. *Указание.* Используйте теорему высоты и равенство $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.

28. Дана окружность $\mathscr{C}(O, r = 8$ см$)$. Постройте треугольник ABC, вписанный в эту окружность так, чтобы $AB = 2BC = 10$ см.

29. Постройте с помощью линейки и циркуля угол, равный:
а) $45°$; б) $22°30'$; в) $157°30'$.

Развиваем способности и творим

30. Окружность $\mathscr{C}(O_1, R)$ лежит вне окружности $\mathscr{C}(O_2, r)$, то есть $O_1O_2 > R + r$. Прямая l – общая касательная к окружностям, где A и B – точки касания. Найдите O_1O_2, если $m(\angle AO_1O_2) = 60°$, $R = 15$ см, $r = 5$ см. Рассмотрите все возможные случаи.

31. Одна из точек касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите длины катетов треугольника.

32. В окружности радиуса 25 см по одну сторону от центра проведены две параллельные хорды длиной 40 см и 30 см соответственно. Найдите расстояние между этими хордами.

33. Дана прямая l и точки M и N. Постройте окружность, проходящую через точки M и N, центр которой лежит на прямой l. В каком случае задача:
а) имеет одно решение;
б) имеет бесконечное число решений;
в) не имеет решений?

34. Точка M лежит во внешней области окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Через точку M проведите прямую, которая пересечет окружность, и точки пересечения определят хорду длины x, где:
а) $r = 10$ см, $MO = 15$ см, $x = 8$ см;
б) $r = 8$ см, $MO = 12$ см, $x = 10$ см.
Указание. Примените теорему: *Две хорды одной окружности конгруэнтны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра этой окружности.*

Математическая шкатулка

35. Поделите круг с помощью трех прямых на:
а) 4 части; б) 5 частей; в) 6 частей; г) 7 частей.

36. Из точки окружности на один из радиусов опущен перпендикуляр, который делит этот радиус на два отрезка, пропорционально числам 8 и 9, считая от центра. Найдите длину перпендикуляра, если радиус окружности равен 68 см.

§2. Углы, вписанные в окружность

2.1. Центральный угол. Дуга окружности

ВСПОМНИМ

1 Найдите величину угла, описанного минутной стрелкой часов за 10 минут.

Определения

- Угол с вершиной в центре окружности называется ее **центральным углом**.
- Пересечение окружности с внутренней областью центрального угла называется **меньшей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile AB$, где A и B – точки пересечения центрального угла с окружностью.
- Пересечение окружности с внешней областью центрального угла называется **большей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile ACB$, где C – точка, принадлежащая окружности, но не принадлежащая меньшей дуге.
- Точки A и B называются **концами дуг**. Дуги AB и ACB называются **дополнительными дугами**.
Кроме того, что точки A и B определяют две дуги, они еще определяют хорду AB. Говорим: „Хорда AB стягивает дугу AB".

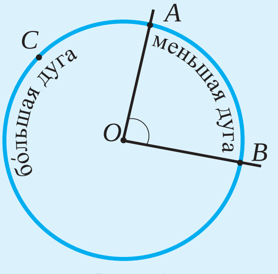


Рис. 12

- **Градусная мера меньшей дуги** окружности считается равной градусной мере соответствующего центрального угла.
- **Градусная мера большей дуги** окружности считается равной 360° минус градусная мера ее дополнительной дуги.
- Две **дуги** одной окружности (или двух конгруэнтных окружностей) **конгруэнтны**, если их градусные меры равны. Обозначение $\smile AB \equiv \smile CD$ читается: „Дуги AB и CD – конгруэнтны".
- Концы диаметра делят окружность на две конгруэнтные дуги, называемые **полуокружностями**, градусная мера каждой равна 180°.

ИССЛЕДУЕМ

2 Рассмотрите рисунок 13 (точка O – центр окружности).
Используя данные рисунка и зная, что $\angle AOB \equiv \angle COD$ и $[AG] \equiv [EF]$, вычислите:
а) CD;
б) $m(\angle FOE)$.

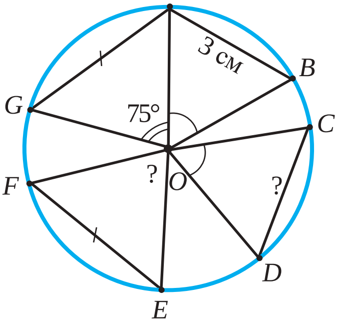


Рис. 13

Объясняем:

$\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (Признак СУС).

Следовательно, CD = ____ см.

$\Delta AOG \equiv$ ____ (Признак ССС).

$m(\angle FOE) = m(\angle$ ____ $)$ = ____°.

Ответ: CD = ____ см, $m(\angle FOE) =$ ____°.

Теорема 4

Если две хорды одной окружности (или двух конгруэнтных окружностей) конгруэнтны, то дуги, стягиваемые ими, конгруэнтны.

Высказывание, обратное теореме 4, также является теоремой.

• Докажите теорему 4 и обратную ей теорему.

3 * Задача на построение

Как можно построить окружность, зная, что хорда длиной 3 см стягивает дугу в 70°?

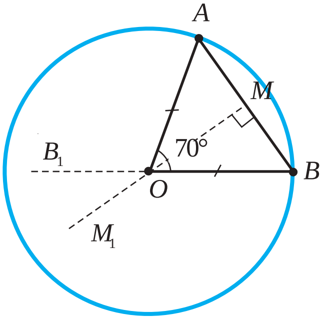


Рис. 14

Решение:

① Для того чтобы построить окружность, надо построить отрезок, равный радиусу окружности (рис. 14).

② Предположим, что построение выполнено (см. рисунок).

③ Пусть $[OM]$ – высота равнобедренного треугольника AOB.

ΔOMB – прямоугольный, $m(\angle B) = 55°$,

BM = 1,5 см.

Следовательно, согласно признаку КУ, треугольник OMB (в частности, гипотенузу OB) можно построить однозначно.

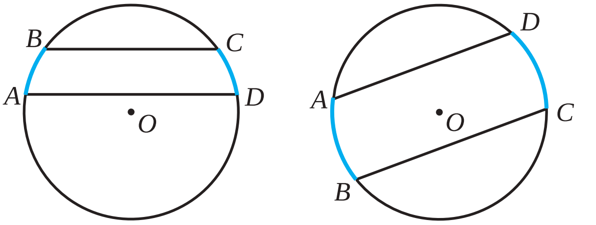
④ Построение можно выполнить следующим образом:

- построим отрезок AB, равный 3 см;
- построим серединный перпендикуляр MM_1 отрезка AB, где точка M – середина отрезка AB;
- построим $[BB_1$ так, чтобы $m(\angle MBB_1) = 55°$;
- $[MM_1 \cap [BB_1 = \{O\}$;
- построим окружность $\mathscr{C}(O, OB)$.

* Дополнительный материал

• Применив свойства треугольников и углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, можно доказать:

Теорема 5
Две дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, конгруэнтны (рис. 15).



$AD \parallel BC \Rightarrow \smile AB \equiv \smile CD$

Рис. 15

2.2. Углы, вписанные в окружность

ИССЛЕДУЕМ

• Рассмотрите рисунки (рис. 16) и найдите $m(\angle ABC)$.

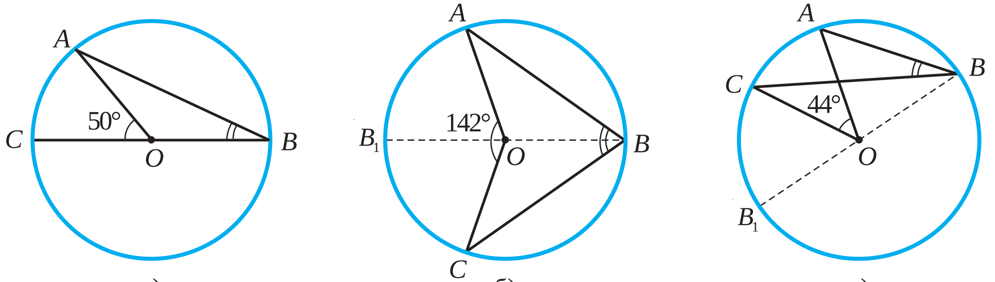


Рис. 16

Решение:

а) Рассмотрим ΔAOB: $[AO]\equiv[OB]$, значит $\angle B \equiv \angle A$.

Угол $\angle AOC$ – внешний угол треугольника AOB, значит, $m(\angle AOC) = m(\angle A) + m(\angle B)$.

$$m(\angle B) = \frac{1}{2}m(\angle \quad) = \quad°.$$

б) Как и в предыдущем пункте,
$$m(\angle ABB_1) = \frac{1}{2}m(\angle AOB_1), \qquad (1)$$
$$m(\angle B_1BC) = \frac{1}{2}m(\angle \quad). \qquad (2)$$

Сложив соотношения (1) и (2), получим:

$$m(\angle ABB_1) + m(\angle B_1BC) = m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\angle \quad) = \quad°.$$

в) Аналогично пунктам а) и б), получим:

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\angle \quad) = \quad°.$$

Теорема 6

Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины дуги, на которую он опирается (рис. 17).

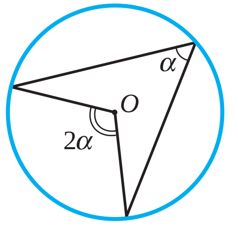


Рис. 17

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, – конгруэнтны (рис. 18).

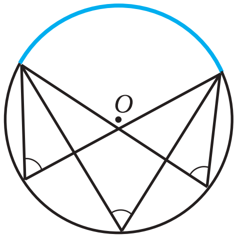


Рис. 18

Следствие 2

Вписанные углы, опирающиеся на полуокружность, – прямые (рис. 19).

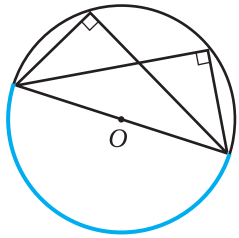


Рис. 19

Задание. На рисунке 20 показан алгоритм построения касательной к окружности с центром O из данной точки M, лежащей вне окружности. Применив следствие 2, объясните алгоритм этого построения.

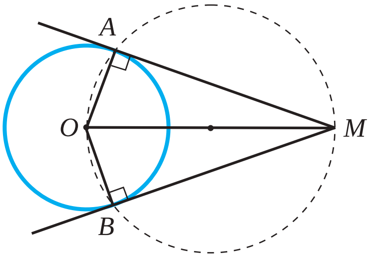


Рис. 20

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Постройте и обозначьте центральный угол величины α окружности $\mathscr{C}(O, r)$, зная, что:

а) $\alpha = 60°$, $r = 4$ см; б) $\alpha = 90°$, $r = 6$ см; в) $\alpha = 120°$, $r = \sqrt{5}$ см.

2. Точки A, B, C принадлежат окружности и $B \in \smile AC$.

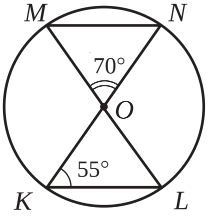
а) Найдите $m(\smile BC)$, если $m(\smile AC) = 120°$, $m(\smile AB) = 75°$.

б) Найдите $m(\smile AC)$, если $m(\smile AB) = 35°$, $m(\smile BC) = 55°$.

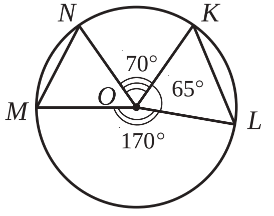
в) Найдите $m(\smile AB)$, если $m(\smile AC) = 150°$, $m(\smile AC) + m(\smile BC) = 175°$.

3. Сравните MN и KL на следующих рисунках (точка O – центр окружности):

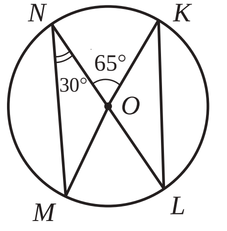
а)



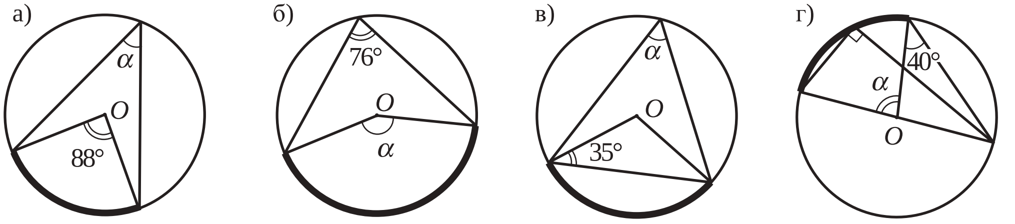
б)



в)



4. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



5. Чему равна градусная мера центрального угла, опирающегося на дугу, длина которой равна:

а) $\frac{1}{3}$ окружности; б) $\frac{1}{5}$ окружности; в) $\frac{1}{10}$ окружности;

г) $\frac{1}{12}$ окружности; д) $\frac{1}{6}$ полуокружности; е) $\frac{1}{12}$ полуокружности?

6. Постройте угол ABC, образованный секущей AC и касательной AB к окружности так, чтобы:

а) $m(\angle ABC)=40°$; б) $m(\angle ABC)=75°$; в) $m(\angle ABC)=350°$.

7. Постройте угол ABC с вершиной B во внутренней области окружности так, чтобы:

а) $m(\angle ABC)=25°$; б) $m(\angle ABC)=115°$; в) $m(\angle ABC)=210°$.

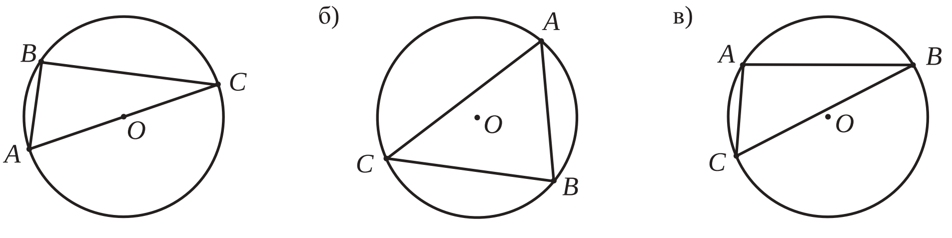
8. Постройте угол ABC с вершиной B во внешней области окружности так, чтобы:

а) $m(\angle ABC)=70°$; б) $m(\angle ABC)=127°$; в) $m(\angle ABC)=165°$.

9. Найдите диаметр окружности, в которую вписан треугольник ABC с прямым углом B и:

а) $AC=8$ см, $BC=4$ см; б) $AB=20$ см, $BC=21$ см.

10. Не измеряя величины углов, определите вид (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный) треугольника ABC, изображенного на рисунке (точка O – центр окружности).



11. Точки A, B, C, D расположены на окружности в данной последовательности. Диаметры $[AC]$ и $[BD]$ – взаимно перпендикулярны. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

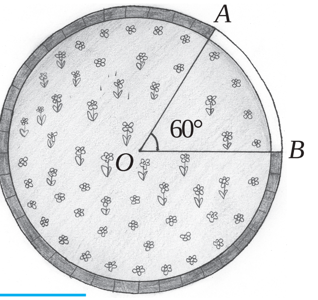
12. Точки A, B, C, D расположены на окружности в данной последовательности. Диаметры $[AC]$ и $[BD]$ – неперпендикулярные. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

13. Точки A, B, C, D расположены в данной последовательности на окружности с центром O и $AB \parallel CD$. Найдите:

а) $m(\angle AOD)$, если $m(\angle BOC)=50°$;

б) $m(\angle BOC)$, если $m(\angle DAO)=70°$;

в) $m(\angle ADO)$, если $m(\angle BCO)=65°$.



14. Господин Албу побелил за 10 минут часть бордюра, опоясывающего клумбу с цветами (см. рисунок). За сколько минут он побелит оставшуюся часть?

15. Дан угол ABC, образованный секущей AB и касательной AC (A – точка касания) к окружности с центром O. Найдите $m(\angle BAC)$, если $m(\angle AOB) = 80°$.

Формируем способности и применяем

16. Точки A, B, C, D, E расположены на окружности в данной последовательности. Найдите градусные меры дуг AB, BC, CD, DEA, если они прямо пропорциональны числам 3, 4, 2, 3.

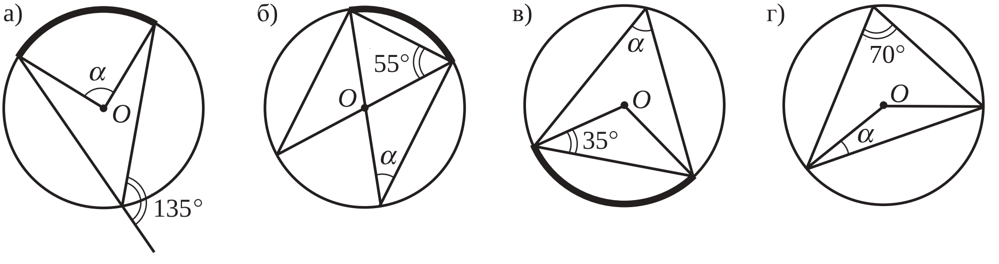
17. Точки A, B, C, D, E расположены на окружности в данной последовательности. Найдите градусные меры дуг AB, BC, CD, DEA, если они прямо пропорциональны числам 1, 2, 3, 6.

18. Через точку окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, длины которых равны 35 см и 12 см соответственно. Найдите радиус окружности.

19. Сколько дуг и сколько хорд определено:
а) тремя данными точками окружности; б) семью данными точками окружности;
в) n данными точками окружности?

20. Разделите окружность на шесть дуг так, чтобы их градусные меры были прямо пропорциональны числам 1, 3, 6, 7, 8, 11.

21. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



22. Чему равна градусная мера дуги, описанной минутной стрелкой часов, в следующих временных интервалах:
а) 20 минут; б) 25 минут; в) 4 минуты; г) 35 минут?

23. Точки A и B лежат на окружности так, что $m(\smile AB) = 120°$. Найдите радиус окружности, если $AB = 6\sqrt{3}$ см.

24. Хорды AB и AC одной окружности конгруэнтны и длина каждой из них равна 16 см. Найдите радиус окружности, если $m(\smile BC) = 120°$.

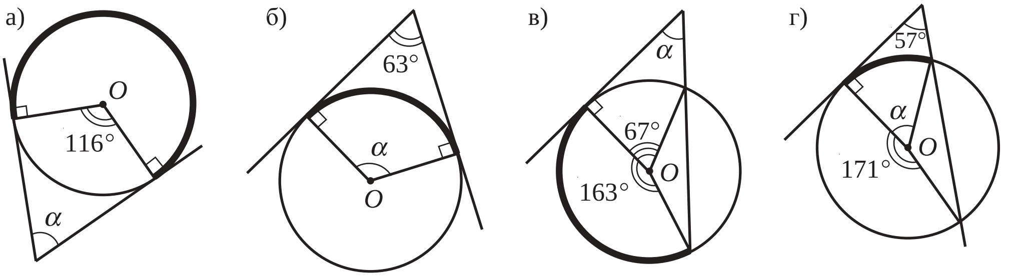
25. Пусть AB – хорда окружности. Через точку A проведена касательная AC к окружности, а через точку B – хорда BD. Найдите $m(\angle BAC)$, если $m(\angle BDA) = 80°$.

Развиваем способности и творим

26. Стороны угла величиной 60° касаются окружности радиуса 20 см. Найдите расстояние между точками касания.

27. Стороны прямоугольного треугольника касаются окружности. Одна из точек касания делит один из катетов на отрезки длиной 3 см и 5 см. Найдите длину гипотенузы.

28. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



29. Постройте с помощью линейки и циркуля дугу, градусная мера которой равна:
а) 60°; б) 30°; в) 120°; г) 15°.

30. Дан угол, равный $19°$. С помощью линейки и циркуля постройте угол, равный:
а) 9°. *Указание.* $180° = 19° \cdot 9 + 9°$. б) 5°; в) 1°.

31. Дан угол, равный $25°$. С помощью линейки и циркуля постройте угол, равный:
а) 10°. *Указание.* $100° = 25° \cdot 4 = 90° + 10°$. б) 5°; в) 20°.

32. Дана окружность $\mathscr{C}(O,\, r = 4\text{ см})$ и точка A, лежащая вне окружности. Постройте касательные AM и AN к окружности.

33. Длина хорды 30 см. Через один из концов хорды проведена касательная к окружности, а через второй – другая хорда длиной 36 см и параллельная касательной. Найдите радиус окружности.

34. В окружности радиуса 2 см проведена хорда длиной 1 см. Через один из концов хорды проведена касательная к окружности, а через второй – другая хорда, параллельная касательной. Найдите длину этой хорды.

§ 3. Вписанная окружность. Описанная окружность

3.1. Вписанная окружность

ИССЛЕДУЕМ

1 Как построить точку M на стороне AB треугольника ABC, равноудаленную от двух других сторон (рис. 21)?

Решение:

① Множество точек, равноудаленных от полупрямых $[CA$ и $[CB$ – это биссектриса угла C. Следовательно, $\{M\} = [AB] \cap [CC_1$, где $[CC_1$ – биссектриса угла C.

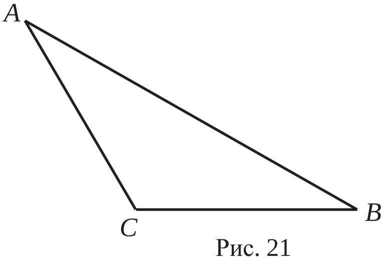


Рис. 21

② Построение биссектрисы угла C выполняется следующим образом (рис. 22):

- строим $\mathscr{C}(C,r)$, $[AC]\cap\mathscr{C}(C,r)=\{O_1\}$,

$$[BC]\cap\mathscr{C}(C,r)=\{O_2\};$$

- строим $\mathscr{C}_1(O_1,r_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2,r_1)$, где $r_1>\dfrac{O_1O_2}{2}$.

$$\mathscr{C}_1(O_1,r_1)\cap\mathscr{C}_2(O_2,r_1)=\{C_1,C_2\},$$

где C_1 принадлежит внутренней области угла C.

- $[CC_1$ – биссектриса угла C.

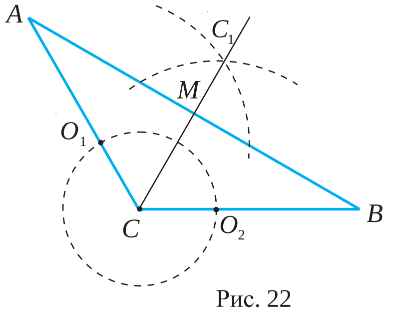


Рис. 22

Свойство биссектрисы
Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон этого угла.

Задания. **1.** Объясните, как можно построить во внутренней области треугольника точку, равноудаленную от сторон этого треугольника. Чем еще является эта точка?

2. Объясните, почему во внутренней области четырехугольника $ABCD$ (рис. 23) нельзя отметить точку, равноудаленную от сторон этого четырехугольника.

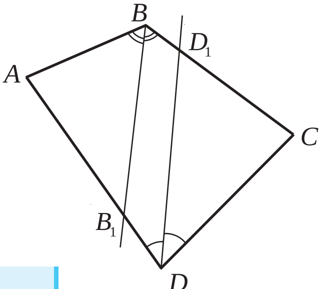


Рис. 23

Определения

- **Окружность** называется **вписанной в выпуклый многоугольник**, если все стороны этого многоугольника касаются окружности. В этом случае многоугольник называется **описанным около этой окружности** (рис. 24).
- Если в выпуклый многоугольник можно вписать окружность, то многоугольник называется **описываемым многоугольником**.

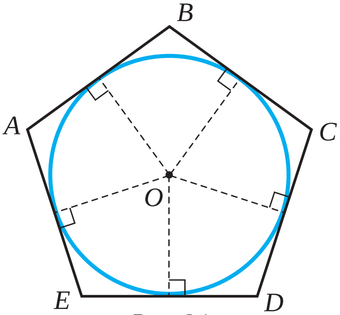


Рис. 24

Замечание. Центр окружности, вписанной в многоугольник, равноудален от сторон многоугольника.

• Применив свойства точек биссектрисы угла, докажите следующую теорему.

Теорема 7
В любой треугольник можно вписать окружность. Центр этой окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника (рис. 25).

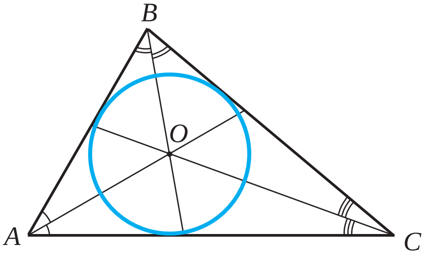


Рис. 25

2 В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность (рис. 26). Найдите DC.

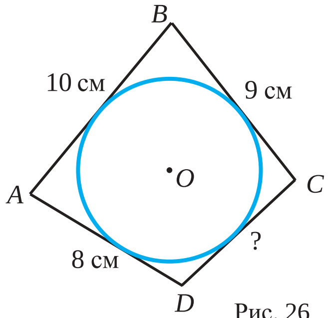


Рис. 26

Решение:

Пусть T_1, T_2, T_3, T_4 – точки касания (рис. 27), где $T_1 \in [AB]$, $T_2 \in [BC]$, $T_3 \in [CD]$, $T_4 \in [AD]$.

Согласно свойству касательных, проведенных из одной точки, лежащей вне окружности:

$[AT_1] \equiv [AT_4]$, $[BT_1] \equiv [BT_2]$, $[CT_2] \equiv \square$, $\square \equiv [DT_4]$.

Следовательно, $AB + DC =$

$= AT_1 + T_1B + CT_3 + T_3D_4 = AT_4 + BT_2 + CT_2 + \square =$

$= (AT_4 + \square) + (BT_2 + CT_2) = \square + BC.$ $(*)$

Из $(*)$ следует, что $DC = \square + BC - AB$.

$DC = \square$ см $+ 9$ см $- 10$ см $= \square$ см.

Ответ: $\square$ см.

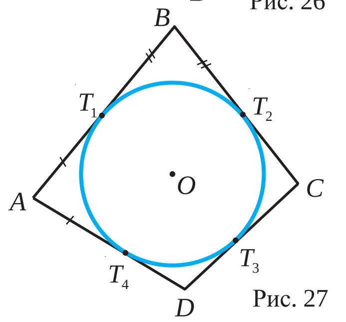


Рис. 27

Теорема 8

Если суммы длин противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

• Сформулируйте и докажите высказывание, обратное теореме 8, которое также является теоремой.

3.2. Описанная окружность

ИССЛЕДУЕМ

1 Какие из перечисленных ниже многоугольников можно построить так, чтобы их вершины принадлежали окружности:

а) равнобедренный треугольник;
б) равносторонний треугольник;
в) разносторонний треугольник;
г) квадрат;
д) прямоугольник;
е) ромб;
ж) произвольная трапеция;
з) равнобокая трапеция?

Определения

- **Окружность** называется **описанной около выпуклого многоугольника**, если все вершины этого многоугольника лежат на окружности. В этом случае многоугольник называется **вписанным в окружность** (рис. 28).
- Если около выпуклого многоугольника можно описать окружность, то многоугольник называется **вписываемым многоугольником**.

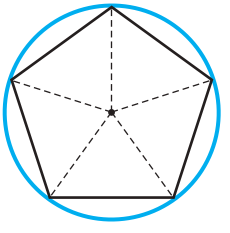


Рис. 28

Замечание. Центр окружности, описанной около многоугольника, равноудален от вершин многоугольника.

Свойство медиатриссы
Точки, принадлежащие медиатриссе отрезка, равноудалены от концов этого отрезка.

• Применив свойство точек медиатриссы отрезка, докажите следующую теорему:

Теорема 9
Около любого треугольника можно описать окружность. Центр этой окружности совпадает с точкой пересечения медиатрисс треугольника (рис. 29).

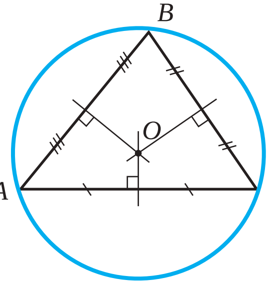


Рис. 29

Задача. Зависит ли от вида треугольника расположение (относительно треугольника) центра окружности, описанной около этого треугольника?

2 Найдите величины углов B и C (рис. 30).

Решение:

① Вычислим градусные меры дуг $\smile BD$ и $\smile BAD$:
$m(\smile BAD) = 360° - m(\smile BD)$,
так как $\smile BAD$ является дополнительной дугой для меньшей дуги $\smile BD$.

② $m(\smile BD) = 2m(\angle A)$, так как угол A опирается на дугу $\smile BD$.
$m(\smile BD) = 2 \cdot 64° = 128°$.

③ $m(\smile BAD) \overset{①}{=} 360° - \square° = \square°$.

$m(\angle C) = \frac{1}{2} m(\smile BAD) = \square° = 180° - 64°$.

④ Аналогичным образом получим $m(\angle B) = \square° = 180° - \square° = 180° - m(\angle \square)$.

Ответ: $m(\angle B) = \square°$; $m(\angle C) = \square°$.

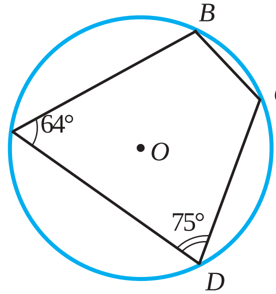


Рис. 30

Теорема 10
Если противолежащие углы четырехугольника дополнительны до 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

• Сформулируйте и докажите высказывание, обратное теореме 10, которое также является теоремой.

3 Рассмотрите и прокомментируйте схему:

• Установите истинность высказываний:

а) В любой треугольник можно вписать окружность.

б) В любой выпуклый четырехугольник можно вписать окружность.

в) Около любого треугольника можно описать окружность.

г) Около любого выпуклого четырехугольника можно описать окружность.

д) Сумма величин противолежащих углов вписываемого четырехугольника равна 180°.

е) Суммы длин противоположных сторон описываемого четырехугольника равны.

Для любознательных Если a – длина сороны равностороннего треугольника, R – радиус описанной около него окружности, r – радиус вписанной в нем окружности, то $R = a\sqrt{3}$ и $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. В какие из перечисленных геометрических фигур можно вписать окружность:

а) разносторонний треугольник; б) равнобедренный треугольник;
в) равносторонний треугольник; г) произвольный выпуклый четырехугольник;
д) параллелограмм; е) ромб;
ж) прямоугольник; з) квадрат?

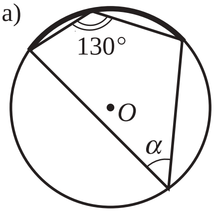
2. Дана окружность $\mathscr{C}(O, r = 5 \text{ см})$. Постройте:

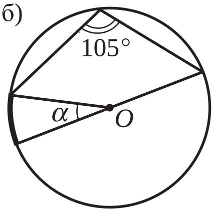
а) разносторонний треугольник, вписанный в окружность;
б) прямоугольный треугольник, вписанный в окружность;
в) тупоугольный треугольник, вписанный в окружность;
г) прямоугольник, вписанный в окружность;
д) квадрат, вписанный в окружность.

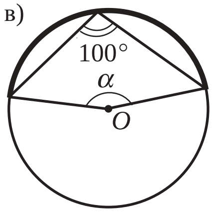
3. Пусть M, N, K – точки касания сторон треугольника ABC с окружностью такие, что $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $K \in [AC]$. Найдите периметр треугольника ABC, если:

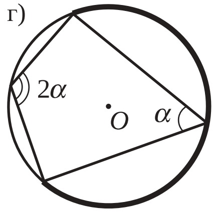
а) $AB = 12$ см, $KC = 6$ см; б) $BN = 12$ см, $AC = 15$ см.

4. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):

а) 

б) 

в) 

г) 

5. Пусть M, N, K – точки касания сторон треугольника ABC с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найдите величины углов треугольника MNK, если:

а) $m(A)=76°$, $m(\angle B)=48°$; б) $m(A)=110°$, $m(\angle C)=40°$.

6. Вычислите длины отрезков, определенных вершинами треугольника и точками касания окружности, вписанной в треугольник, если стороны треугольника равны:

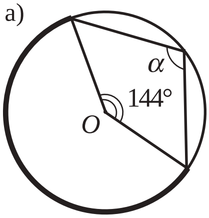
а) 12 см, 8 см, 9 см; б) 17 см, 13 см, 14 см.

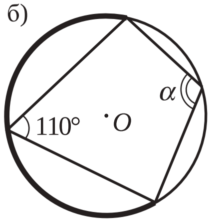
7. Вершины треугольника ABC лежат на окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Определите вид треугольника (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный), если:

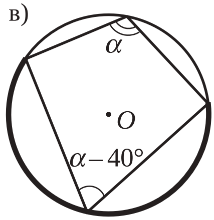
а) $O \in \operatorname{Int}\Delta ABC$; б) $O \in \operatorname{Ext}\Delta ABC$; в) $O \in AB$; г) $O \in AC$.

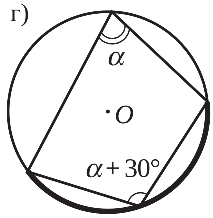
8. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается боковых сторон AB и AC в точках соответственно M и N, а основание – в точке K. Найдите AM и BK, если $AB = 25$ см, $BC = 14$ см.

9. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):

а) 

б) 

в) 

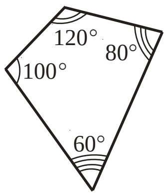
г) 

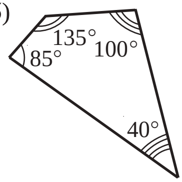
Формируем способности и применяем

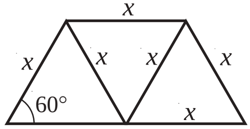
10. Постройте треугольник со сторонами 8 см, 9 см, 10 см и окружность, описанную около этого треугольника.

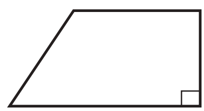
11. Постройте треугольник со сторонами 8 см, 9 см, 12 см и окружность, вписанную в этот треугольник.

12. Определите, является ли четырехугольник вписываемым:

а) 

б) 

в) 

г) 

13. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

14. Пусть M, N, K – точки касания сторон треугольника ABC с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найдите величины углов треугольника MNK, если:

а) $m(\angle A)=30°$, $m(\angle B)=75°$; б) $m(\angle B)=44°$, $m(\angle C)=52°$; в) $m(\angle A)=106°$, $m(\angle C)=38°$.

15. Постройте треугольник ABC со сторонами, равными:
а) 10 см, 10 см, 8 см; б) 6 см, 8 см, 10 см; в) 12 см, 8 см, 5 см.
Постройте окружность, описанную около треугольника ABC. Проверьте с помощью линейки, являются ли коллинеарными ортогональные проекции произвольной точки M окружности на стороны треугольника. Сделайте вывод.

16. Пусть M, N, K – точки касания сторон треугольника ABC с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найдите величины углов треугольника ABC, если:
а) $m(\angle MNK)=40°$, $m(\angle MKN)=80°$; б) $m(\angle MNK)=65°$, $m(\angle KMN)=48°$;
в) $m(\angle MKN)=44°$, $m(\angle KMN)=52°$.

17. Радиусы вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника равны 1,5 см и 3,125 см. Найдите стороны треугольника, если известно, что их длины являются целыми числами.

Развиваем способности и творим

18. Докажите, что трапеция является вписываемой, если она равнобокая.

19. Сторона квадрата $ABCD$ равна 18 см, $M\in[AB]$, $N\in[BC]$, так, что AM = 6 см, BN = 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника DMN.

20. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность $\mathscr{C}(O,\ r=6$ см$)$. Окружность $\mathscr{C}(O_1,\ r_1)$ касается окружности $\mathscr{C}(O,\ r)$ и сторон AB и BC треугольника.
Найдите O_1A.
Указание. Учтите, что точка O_1 находится на одной биссектрисе треугольника ABC.

Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

1. а) Постройте окружность радиуса 5 см. Постройте хорды AB = 5 см, BC = 6 см, диаметры MN и KL.
б) Измерьте величины углов LMK и LNK.

2. Определите взаимное расположение точки A и $\mathscr{C}(O,\ r=7\sqrt{3}$ см$)$, если:
а) $OA=\dfrac{19}{2\sqrt{3}}$ см; б) $OA=(4\sqrt{3}+2\sqrt{5})$ см; в) $OA=\dfrac{21}{\sqrt{3}}$ см; г) $OA=(7+\sqrt{3})$ см.

3. Точки A, B, C принадлежат окружности $\mathscr{C}(O,\ r=6{,}5$ см$)$, причем $[AB]$ – диаметр. Найдите AC, если $BC=12$ см.

4. Дана окружность $\mathscr{C}(O,\ r=8\sqrt{5}$ см$)$ и конгруэнтные хорды AB и CD. Найдите $d(O,\ AB)$, если $d(O,\ CD)=6$ см.

5. Дана окружность $\mathscr{C}(O,\ r=\sqrt{19}$ см$)$. Найдите длину хорды AB, если $d(O,\ AB)=\sqrt{6}$ см.

6. Постройте и обозначьте центральный угол величиной $45°$ окружности $\mathscr{C}(O,\ r=6$ см$)$.

7. Точки M, N, K, L расположены в данном порядке на окружности. Найдите:
а) $m(\smile MN)$, если $m(\smile ML)=115°$, $m(\smile NL)=55°$;
б) $m(\smile NK)$, если $m(\smile MK)=37°$, $m(\smile NL)=65°$, $m(\smile ML)=85°$;
в) $m(\smile KL)$, если $m(\smile MN)=39°$, $m(\smile MK)=94°$, $m(\smile NL)=122°$.

8. Постройте в окружности $\mathscr{C}(O,\ r=4{,}5$ см$)$ вписанный угол, равный:
а) $100°$; б) $160°$; в) $240°$; г) $180°$.

9. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите:
а) AM, если $CM = 18$ см, $MD = 3$ см, $MB = 9$ см;
б) MB, если $AM = \sqrt{7}$ см, $CM = 3{,}5$ см, $MD = 8$ см.

10. Точки A, B, C, D расположены в данном порядке на окружности и $AB \cap CD = \{M\}$.
Найдите: а) CM, если $AM = 24$ см, $MB = 8$ см, $MD = 16$ см;
б) MD, если $AM = \frac{2}{3}$ см, $MB = \frac{3}{4}$ см, $CM = 1$ см.

11. Точки A, B, C расположены на окружности с центром O. Найдите:
а) $m(\angle ABC)$, если $m(\angle AOC) = 104°$; б) $m(\angle AOC)$, если $m(\angle ABC) = 37°$;
в) $m(\angle OAC)$, если $m(\angle AOC) = 88°$; г) $m(\angle ACO)$, если $m(\angle ABC) = 29°$.

12. Найдите градусную меру дуги, описанной минутной стрелкой часов, в следующих временных интервалах: а) 5 минут; б) 25 минут; в) 45 минут.

■ ■ Формируем способности и применяем

13. Постройте треугольник ABC со сторонами, длиной $\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, $3\sqrt{2}$ см, и описанную около него окружность.

14. Точки A, B, C принадлежат окружности $\mathscr{C}(O, r = 2\sqrt{6}$ см), причем $[AB]$ – диаметр. Найдите BC, если $OM = 4$ см, где точка M – середина отрезка BC.

15. С помощью угольника и циркуля постройте угол, равный: а) $135°$; б) $157°\,30'$.

16. Диаметр AB окружности радиуса $2\sqrt{17}$ см пересекает хорду CD в ее середине – точке M. Найдите AM и BD, если $CM = 5\sqrt{2}$ см.

17. Медиатрисса хорды AB пересекает окружность в точках C и D. Найдите радиус окружности, если $AB = 14$ см и $d(C, AB) = 4$ см.

18. Из точки M проведены касательные к $\mathscr{C}(O, r = 6$ см), где точки A и B – точки касания. Найдите OM, если $AM = 9$ см.

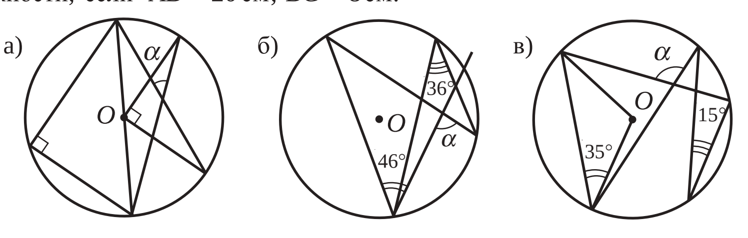
19. Найдите углы треугольника ABC, вписанного в окружность, если:
а) $m(\smile AB) = 50°$, $m(\smile AC) = 80°$; б) $m(\smile AB) = 46°$, $m(\smile AC) = 74°$.

20. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите величины углов четырехугольника и величины углов между его сторонами и диагоналями, если:
а) $m(\smile AB) = 62°$, $m(\smile BC) = 86°$, $m(\smile AD) = 110°$;
б) $m(\smile AB) = 25°$, $m(\smile BC) = 55°$, $m(\smile AD) = 140°$.

■ ■ ■ Развиваем способности и творим

21. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с бóльшим основанием AD вписана окружность. Найдите радиус окружности, если $AB = 20$ см, $BC = 8$ см.

22. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



23. Докажите, что величина угла с вершиной во внутренней области окружности равна полусумме градусных мер дуги, заключенной между его сторонами, и дуги между продолжениями его сторон.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. а) Начертите и обозначьте окружность с центром M и радиусом 3 см. Постройте диаметр BD, хорды DA и BA, касательную к окружности в точке A. **3 б**

б) Определите истинность высказывания: „Если расстояние от точки M до точки X равно $(\sqrt{3}+2)$ см, то точка X находится вне данной окружности.” Объясните ответ. **2 б**

в) Зная, что $m(\angle AMB) = 50°$, найдите величины углов треугольника ABD. **4 б**

г) Зная, что $m(\angle AMB) = 50°$, найдите величину угла между заданной касательной и хордой DA. **3 б**

2. Диаметр AB окружности с центром O, радиус которой 13 см, перпендикулярен хорде MN длиной 24 см и пересекает ее в точке C.

а) Найдите расстояние от центра окружности до хорды MN. **3 б**

б) В каком отношении точка C делит диаметр AB? **3 б**

3. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями BC = 9 см и AD = 25 см вписана окружность с центром O.

а) Найдите длину боковой стороны трапеции. **3 б**

б) Найдите радиус вписанной окружности. **4 б**

в) Докажите, что треугольник AOB – прямоугольный. **4 б**

II вариант

1. а) Начертите и обозначьте окружность с центром N и радиусом 2 см. Постройте диаметр AB, хорды AC и BC, касательную к окружности в точке A.

б) Определите истинность высказывания: „Если расстояние от точки N до точки Y равно $(\sqrt{5}-1)$ см, то точка Y находится вне данной окружности.” Объясните ответ.

в) Зная, что $m(\angle CBA) = 40°$, найдите величины углов треугольника ACN.

г) Зная, что $m(\angle CBA) = 40°$, найдите величину острого угла между заданной касательной и хордой AC.

2. Хорда AB длиной 40 см окружности с центром O перпендикулярна диаметру DC и находится на расстоянии 21 см от центра окружности.

а) Найдите радиус окружности.

б) В каком отношении делит диаметр DC точка его пересечения с хордой AB?

3. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с боковыми сторонами AB = 24 см, CD = 25 см вписана окружность с центром Q.

а) Найдите радиус вписанной окружности.

б) Найдите длины оснований трапеции.

в) Докажите, что треугольник CDQ – прямоугольный.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	29–28	27–25	24–21	20–17	16–13	12–10	9–7	6–5	4–3	2–1

Глава 3

Площади

§ 1. Понятие площади

С понятием площади мы встречались еще в начальных классах, когда вычисляли площадь квадрата, прямоугольника. В действительности, мы определяли площадь поверхности, ограниченной этими многоугольниками.

Объединение выпуклого многоугольника со своей внутренней областью называется **выпуклой многоугольной поверхностью**. Объединение конечного числа выпуклых многоугольных поверхностей является **многоугольной поверхностью**.

Площадь – это величина, характеризующая многоугольную поверхность. Однако, по традиции, вместо „площадь многоугольной поверхности” говорим „ площадь многоугольника”. Обозначим площадь многоугольника $A_1A_2...A_n$ через $\mathscr{A}_{A_1A_2...A_n}$.

Заметим, что площадь обладает следующими свойствами:

1° Площадь многоугольника выражается неотрицательным числом.

2° Площади конгруэнтных многоугольников равны.

3° Если многоугольник составлен из различных многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

4° Площадь квадрата со стороной, равной единице, равна единице.

Значит, если длина стороны квадрата равна 1 м, то его площадь равна одному квадратному метру (обозначаем: м^2); если длина стороны квадрата равна 1 см, то его площадь равна одному квадратному сантиметру (обозначаем: см^2) и т. д.

Многоугольники с равными площадями называются **эквивалентными многоугольниками**.

§ 2. Площадь параллелограмма

2.1. Площадь квадрата, площадь прямоугольника, площадь ромба

Вспомним

1 Вычислите площадь квадрата, если длина его стороны равна 2,5 см.

Решение:

Площадь квадрата, длина которого равна a, вычисляется по формуле $\mathscr{A} = a^2$. Значит, $\mathscr{A} = 2{,}5^2 = 6{,}25$ (см^2).

2 Дан квадрат *ABCD* (рис. 1).

а) Сравните площади треугольников *ABC* и *ADC*.

б) Вычислите площадь треугольника *ABC*, если длина стороны квадрата 3 см.

Решение:

а) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (признак КК). Следовательно, по свойству 2°, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{ADC}$.

б) По свойству 3°, $\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{ABC} + \mathscr{A}_{ACD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 4{,}5$ (см^2).

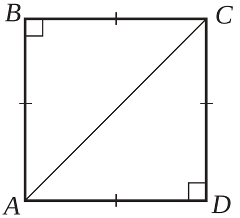


Рис. 1

ОБОБЩИМ

Площадь квадрата со сторонами длиной *a* равна a^2.

Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами длиной *a* равна $\frac{a^2}{2}$.

3 Вычислите площадь прямоугольника, если длины его сторон равны 7,2 см и 1,1 см.

Решение:

Площадь прямоугольника со сторонами длиной *a* и *b* вычисляется по формуле $\mathscr{A} = a \cdot b$. Следовательно, $\mathscr{A} = 7{,}2 \cdot 1{,}1 = 7{,}92$ (см^2).

4 Дан прямоугольник *ABCD* (рис. 2).

а) Сравните площади треугольников *ABC* и *ADC*.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если длины сторон прямоугольника равны 6 см и 12 см.

Решение:

а) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (признак КК). Значит, по свойству 2°, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{ADC}$.

б) По свойству 3°, $\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{ABC} + \mathscr{A}_{ACD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$ (см^2).

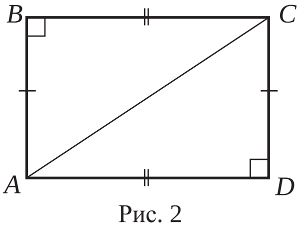


Рис. 2

ОБОБЩИМ

Площадь прямоугольника со сторонами длиной *a* и *b* равна $\mathscr{A} = a \cdot b$.

Площадь прямоугольного треугольника с катетами длиной *a* и *b* равна $\mathscr{A} = \frac{1}{2} a \cdot b$.

ИССЛЕДУЕМ

5 Вычислите площадь ромба $ABCD$, длины диагоналей которого равны $AC = 13{,}4$ см и $BD = 18$ см.

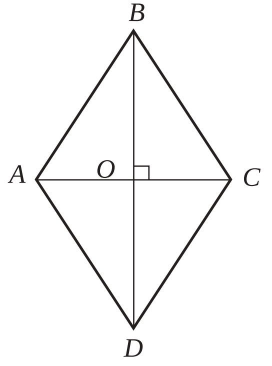


Рис. 3

Решение:

Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, и точка пересечения делит их пополам.

Прямоугольные треугольники AOB, COB, COD, AOD конгруэнтны. Следовательно, $\mathcal{A}_{ABCD} = 4\mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO =$
$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 13{,}4 \cdot 18 = 120{,}6$ (см^2).

ОБОБЩИМ

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{ромба}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$, где d_1 и d_2 – длины диагоналей ромба.

2.2. Площадь параллелограмма

ИССЛЕДУЕМ

1 Дан параллелограмм $ABCD$, где $[BM]$, $[CN]$ – его высоты (рис. 4).

а) Сравните площади треугольников ABM и DCN.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $MB = 8$ см и $AD = 11$ см.

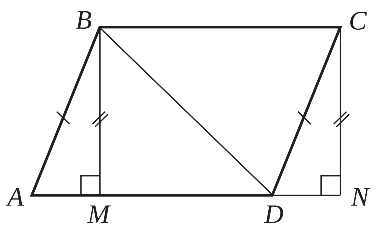


Рис. 4

Решение:

а) $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$ (признак КГ). Значит, по свойству 2°, $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{DCN}$.

б) По свойству 3° имеем $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{ABM} =$

$= \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{DCN} = \mathcal{A}_{MBCN}$.

$MBCN$ – прямоугольник и $\mathcal{A}_{MBCN} = MB \cdot BC = MB \cdot AD = 8 \cdot 11 = 88$ (см^2).

ОБОБЩИМ

Площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{парал.}} = a \cdot h}$, где h – высота, проведенная к стороне длины a.

§ 3. Площадь треугольника

ИССЛЕДУЕМ

1 Вычислите площадь треугольника ABC с высотой BM, если $AC = 16$ см, $BM = 8$ см.

Решение:

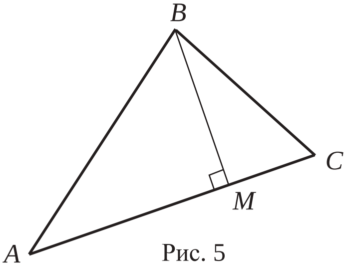


Рис. 5

Треугольники AMB и BMC – прямоугольные (рис. 5).

Следовательно, $\mathscr{A}_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AM$, $\mathscr{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$.

Значит, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{AMB} + \mathscr{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot AM + \frac{1}{2} BM \cdot MC =$

$= \frac{1}{2} BM (AM + MC) = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64 (\text{см}^2)$.

ОБОБЩИМ И УЗНАЕМ

- **Площадь треугольника** равна половине произведения длины стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2} a \cdot h}$, где h – высота, проведенная к стороне длины a треугольника.

- **Формула Герона**:

$\boxed{\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, где a, b, c – длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр.

Теорема 1

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2 Дан треугольник ABC и $M \in (AC)$, так, что $\frac{AM}{MC} = 4$ (рис. 7). Найдите $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}}$.

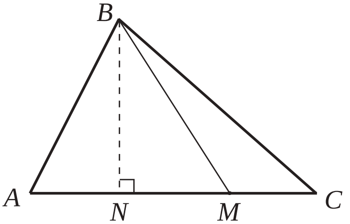


Рис. 7

Решение:

Отметим точку $N \in AC$, так, чтобы $BN \perp AC$.

Таким образом, $[BN]$ – общая высота треугольников ABM и BMC.

Имеем: $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2} BN \cdot AM}{\frac{1}{2} BN \cdot MC} = \frac{AM}{MC} = 4.$

Теорема 2

Пусть дан треугольник ABC и $M \in (AC)$. Тогда $\dfrac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}} = \dfrac{AM}{MC}$.

Следствие. Медиана треугольника делит этот треугольник на два эквивалентных треугольника.

§ 4. Площадь трапеции

ИССЛЕДУЕМ

1 Пусть $TRAP$ – трапеция с бо́льшим основанием TP длиной a, меньшим основанием RA длиной b и высотой h. Вычислите площадь трапеции.

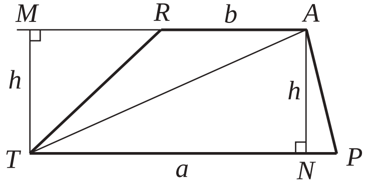


Рис. 8

Решение:

Отметим точки $M \in RA$ и $N \in TP$, такие, что $TM \perp RA$, $AN \perp TP$ (рис. 8). Очевидно, что $TM = AN = h$.

Тогда $\mathscr{A}_{TRAP} = \mathscr{A}_{TRA} + \mathscr{A}_{TAP} = \frac{1}{2} TM \cdot RA + \frac{1}{2} AN \cdot TP = \frac{1}{2} h \cdot b + \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{1}{2} h(a+b)$.

ОБОБЩИМ

Площадь трапеции с основаниями длиной a и b и высотой h вычисляется по формуле $\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2} h(a+b) = h \cdot m}$, где m – длина средней линии трапеции.

2 Дана трапеция $ABCD$, где $AD \parallel BC$ (рис. 9).

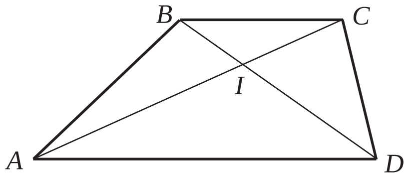


Рис. 9

а) Сравните $\mathscr{A}_{ABD}$ и $\mathscr{A}_{ACD}$, $\mathscr{A}_{ABC}$ и $\mathscr{A}_{BCD}$.

б) Пусть $\{I\} = AC \cap BD$. Сравните $\mathscr{A}_{ABI}$ и $\mathscr{A}_{CID}$.

Решение:

а) Высоты треугольников ABD и ACD, опущенные из вершин B и C на общую сторону AD, являются высотами трапеции. Следовательно, треугольники ABD и ACD – эквивалентны, то есть $\mathscr{A}_{ABD} = \mathscr{A}_{ACD}$. Аналогично можно показать, что $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{BCD}$.

б) $\mathscr{A}_{ABI} = \mathscr{A}_{ABD} - \mathscr{A}_{AID}$, $\mathscr{A}_{CID} = \mathscr{A}_{ACD} - \mathscr{A}_{AID}$.

Но согласно пункту а), $\mathscr{A}_{ABD} = \mathscr{A}_{ACD}$. Следовательно, $\mathscr{A}_{ABI} = \mathscr{A}_{CID}$.

ОБОБЩИМ

Треугольники, образованные диагоналями трапеции с боковыми сторонами и одним из оснований, эквивалентны.

Треугольники, образованные диагоналями и боковыми сторонами, эквивалентны.

§ 5. Площадь правильного многоугольника. Длина окружности и площадь круга

1 Зная, что m – длина апофемы, а l – длина стороны, вычислите площадь правильного многоугольника: а) с 6 сторонами; б) с n сторонами.

Решение:

а) Правильный многоугольник с 6 сторонами называется правильным шестиугольником.

Пусть O – центр окружности, вписанной в правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 10). Очевидно, что треугольники AOB, BOC, COD, DOE, EOF и AOF конгруэнтны, и сумма их площадей равна площади шестиугольника $ABCDEF$.

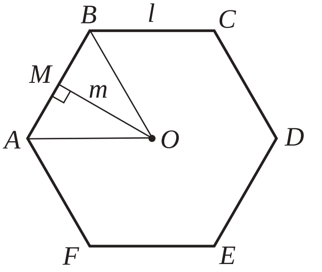


Рис. 10

Следовательно,

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB}. \qquad (1)$$

Пусть $[OM]$ – высота треугольника AOB. Так как треугольник AOB равнобедренный, то $[OM]$ – апофема, то есть $OM = m$.

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot l. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим: $\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{1}{2} ml = 3ml.$

Ответ: $3ml$.

б) Пусть $A_1A_2...A_n$ – правильный многоугольник с n сторонами, точка O – центр окружности, вписанной в этот многоугольник (рис. 11).

Аналогично пункту а), если соединим точку O с вершинами многоугольника, то получим n конгруэнтных треугольников и $\mathcal{A}_{A_1, A_2 ... A_n} = n \cdot \mathcal{A}_{A_1OA_2}$.

Но $\mathcal{A}_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} ml$. Следовательно, $\mathcal{A}_{A_1, A_2 ... A_n} = \frac{1}{2} mnl$.

Ответ: $\frac{1}{2} mnl$.

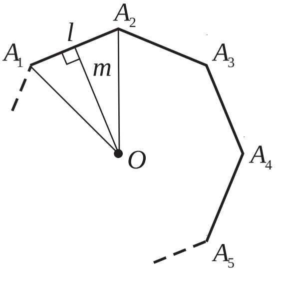


Рис. 11

ОБОБЩИМ

Площадь правильного n – угольника можно вычислить по формуле $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot l$, где m – апофема, l – длина стороны многоугольника.

2 Дана окружность радиуса 1. Можно доказать, что в эту окружность возможно вписать любой правильный n-угольник. Вычислив периметры этих многоугольников, получим, например:

для $n = 4$, $P_4 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}656854$;

для $n = 8$, $P_8 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 6{,}12253492$;

для $n=16$, $P_{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\approx 6{,}24289030$;

для $n=32$, $P_{32}=32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\approx 6{,}27309698$.

Заметим, что полученные периметры приближенно равны. Естественно, что каждый из этих периметров – это приближенное значение с определенной точностью длины окружности радиуса 1. Очевидно, что, чем больше число сторон правильного многоугольника, тем точнее приближенное значение длины окружности.

Вычисленные периметры приближенно равны удвоенному иррациональному числу $\pi \approx 3{,}14159...$

Следовательно, длина окружности радиуса 1 равна 2π.

Можно доказать формулу

$$\boxed{L=2\pi R},$$

где L – длина окружности, а R – ее радиус.

3 Найдите площадь круга $\mathscr{D}(O, R)$.

Решение:

В окружность $\mathscr{C}(O, R)$ впишем правильный n-угольник.

Площадь этого многоугольника равна $\mathscr{A}_n=\frac{1}{2}n\cdot l\cdot m$, где l – длина стороны, а m – апофема многоугольника.

Чем больше n, тем точнее $n\cdot l$ приближает значение длины окружности, а m – радиус R окружности. Поэтому можем считать, что $\mathscr{A}_{\text{круга}}=\frac{1}{2}L\cdot R$, где L – длина окружности, ограничивающей круг.

Следовательно, так как $L=2\pi R$, получим $\boxed{\mathscr{A}_{\text{круга}}=\pi R^2}$.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Вычислите периметр и площадь квадрата, если длина его стороны равна:
а) 3 см; б) 3,7 см; в) $6\sqrt{5}$ см; г) $7\frac{2}{9}$ см.

2. Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна:
а) 225 $см^2$; б) 48 $см^2$; в) $16\frac{1}{8}$ $см^2$; г) $(\sqrt{3}-2)^2$ $см^2$.

3. Вычислите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если длины его катетов равны: а) 2,7 см; б) 3,5 см; в) $(2+\sqrt{3})$ см; г) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ см.

4. Найдите длину катета равнобедренного прямоугольного треугольника, если его площадь равна: а) 72 $см^2$; б) 120 $см^2$; в) $2\frac{1}{12}$ $см^2$; г) $(2\sqrt{5}-5)^2$ $см^2$.

5. Вычислите площадь прямоугольника, длины сторон которого равны:
а) 4,4 см и 1,2 см; б) $4\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см;
в) $(2\sqrt{31}+\sqrt{29})$ см и $(2\sqrt{31}-\sqrt{29})$ см; г) $11\frac{1}{16}$ см и $\frac{256}{177}$ см.

6. Вычислите периметр и площадь прямоугольного треугольника, если длины его катетов равны:

а) 3 дм и 40 см; б) 12 см и 50 мм; в) 0,8 м и 60 см; г) 120 мм и 1,2 дм.

7. Найдите измерения прямоугольника, площадь которого равна $\mathcal{A}$ и периметр $\mathcal{P}$, если:

а) $\mathcal{A}=18{,}25$ см^2, $\mathcal{P}=19{,}6$ см; б) $\mathcal{A}=110$ см^2, $\mathcal{P}=32\sqrt{2}$ см;

в) $\mathcal{A}=\frac{14}{27}$ см^2, $\mathcal{P}=1\frac{4}{9}$ см; г) $\mathcal{A}=32$ см^2, $\mathcal{P}=36$ см.

8. Длины сторон двух земельных участков квадратной формы равны 15 м и 25 м. Одно из измерений земельного участка прямоугольной формы, эквивалентного данным участкам, равно 50 м. Найдите другое его измерение.

9. Дан параллелограмм $ABCD$, $h_1=\mathrm{d}(A, BC)$, $h_2=\mathrm{d}(B, CD)$ и $\mathcal{A}$ – площадь параллелограмма. Перечертите и заполните таблицу:

AB	BC	h_1	h_2	$\mathcal{A}$
	15	12	10	
$5\sqrt{5}$	5		$3\sqrt{5}$	
		7	10,5	210
	18		9	162

10. Пусть h_a, h_b, h_c – высоты треугольника, проведенные соответственно к сторонам a, b, c, а $\mathcal{A}$ – площадь треугольника. Перечертите и заполните таблицу:

a	b	c	h_a	h_b	h_c	$\mathcal{A}$
6	12		10		5	
	15		12	10	9	
14,4		16		12		144
24	30				21	210

11. Дан треугольник ABC. Найдите площадь треугольника, если:

а) $AB=6$ см, $BC=7$ см, $AC=9$ см;

б) $AB=18$ см, $BC=9\sqrt{3}$ см, $AC=8\sqrt{3}$ см;

в) $AB=10$ см, $BC=12$ см, $\mathrm{m}(\angle A)=90°$.

12. Пусть h – высота трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AB. Найдите площади треугольников ABC, ABD, ADC, DCB, если:

а) $AB=11$ см, $CD=8$ см, $h=9$ см; б) $AB=7\sqrt{5}$ см, $CD=4\sqrt{5}$ см, $h=5\sqrt{5}$ см;

в) $AB=9\frac{15}{22}$ см, $CD=\frac{90}{11}$ см, $h=11$ см; г) $AB=12$ см, $AD=7$ см, $\mathrm{m}(\angle A)=\mathrm{m}(\angle B)=45°$.

13. Пусть h – высота, m – средняя линия и $\mathcal{A}$ – площадь трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AB. Перечертите и заполните таблицу:

AB	CD	h	m	$\mathcal{A}$
10	6	7		
18		22	16	
32		20		560

14. Вычислите длину окружности и площадь круга, радиуса: а) 10 см; б) 15 см; в) 8 см.

15. Найдите площадь параллелограмма с углом 45°, если одна из его диагоналей равна 9 см и совпадает с одной из его высот.

16. Высоты параллелограмма равны 8 см и 6 см, а его площадь – 72 см^2. Найдите периметр параллелограмма.

17. Точка E лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 104 см^2. Найдите площадь треугольника ABE.

18. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью длиной 4π м.

Формируем способности и применяем

19. Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, равен 4 см. Найдите площадь многоугольника, если: а) $n=6$; б) $n=8$; в) $n=10$.

20. Найдите периметр и площадь квадрата, если его диагонали равны:
а) $12\sqrt{2}$ см; б) 18 см; в) $a\sqrt{2}$ см; г) x см.

21. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его сторона увеличится:
а) в 3 раза; б) в 7 раз; в) в n раз?

22. Во сколько раз уменьшится диагональ квадрата, если площадь уменьшится:
а) в 4 раза; б) в 10 раз; в) в $(\sqrt{11}-4)^2$ раз?

23. Во сколько раз увеличится площадь прямоугольника, если:
а) длина одной из его сторон увеличится в 4 раза;
б) длина каждой его стороны увеличится в 5 раз;
в) длина одной стороны увеличится в 8 раз, а другой уменьшится в 3 раза?

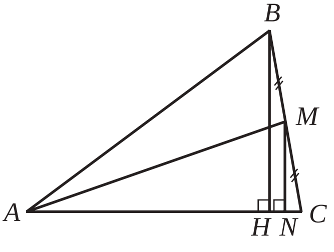
24. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой высота BH равна 7 см, а точка H делит основание AD на два отрезка так, что наибольший из них равен 9 см.

25. Найдите площадь прямоугольной трапеции с основаниями 12 см и 9 см и боковой стороной, равной 6 см.

26. Вершины трапеции расположены на окружности, радиус которой равен 13 см, а центр находится на основании трапеции. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см.

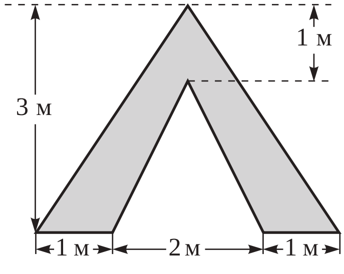
27. Диагонали ромба соответственно увеличили на 40% и 20%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

28. Рассмотрите рисунок. Зная, что $AB=20$ см, $BH=12$ см, $AM=18$ см, найдите площадь треугольника ABC.

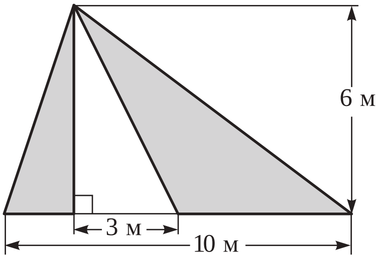


29. На 1 м^2 расходуется 100 г краски. Сколько краски потребуется для покраски следующей поверхности?

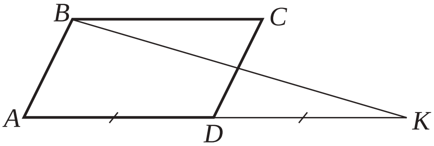
а)



б)



30. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка K лежит на прямой AD так, что $AD = DK$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\mathcal{A}_{BDK} = 24$ см^2.



31. Найдите площадь прямоугольного треугольника, зная, что сумма длин его катетов равна 11 см, а сумма их квадратов – 61 см^2.

32. Вычислите площадь трапеции, диагонали которой равны 113 см и 17 см, а ее высота – 15 см.

33. Найдите радиус круга, зная, что его площадь равна сумме площадей двух других кругов, радиусы которых соответственно равны 5 см и 12 см.

Развиваем способности и творим

34. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ пересекает высоту BE в точке O, так, что $\dfrac{BO}{OE} = \dfrac{5}{3}$. Найдите площадь четырехугольника $BEDC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 100 см^2.

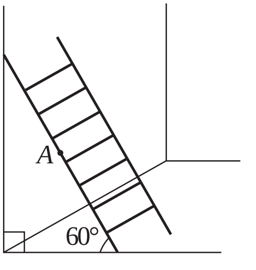
35. Точка E принадлежит стороне AD прямоугольника $ABCD$ так, что $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{m}{n}$. Найдите площадь четырехугольника $BEDC$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна S.

36. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, делит высоту BM в отношении $\dfrac{17}{15}$. Найдите периметр и площадь треугольника, если радиус окружности равен 7,5 см.

37. Найдите площадь трапеции с основанием 7 см и 20 см, диагонали которой равны 13 см и $5\sqrt{10}$ см.

38. Определите множество всех точек M, принадлежащих внутренней области равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, зная, что $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{BCM}$.

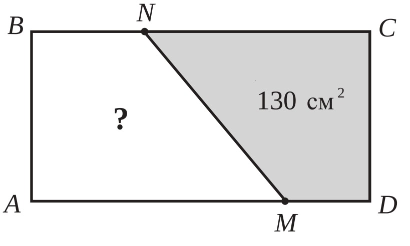
39. Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Она соскальзывает по стене так, что ее верхние точки коснутся пола. Найдите длину дуги, описываемой точкой A, которая лежит на середине лестницы (см. рисунок), зная, что длина лестницы равна 6 м.



40. Найдите площадь трапеции с основаниями 2 см и 3 см и диагоналями 3 см и 4 см.

41. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении 3 : 4. Вычислите площадь треугольника, если длина гипотенузы равна 35 см.

42. Точки M и N лежат на сторонах соответственно AD и BC прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок) так, что $\dfrac{DM}{AM} = 0{,}25$, $\dfrac{CN}{BN} = 2$. Найдите $\mathcal{A}_{ABNM}$, если $\mathcal{A}_{DMNC} = 130$ см^2.



43. В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса r. Найдите площадь трапеции, если ее большее основание в 2 раза длиннее меньшего основания.

44. Постройте 4 неконгруэнтных эквивалентных треугольника.

45. Разделите треугольник на 5 эквивалентных между собой треугольников.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Дополните:

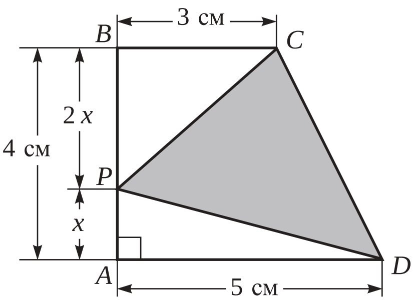
а) Площадь прямоугольника со сторонами 4 см и 8 см равна ______. **2 б**

б) Площадь прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 11 см равна ______. **2 б**

в) Площадь параллелограмма с одной из сторон 18 см и высотой 5 см, проведенной к этой стороне, равна ______. **2 б**

г) Площадь ромба с диагоналями 13 см и 9 см равна ______. **2 б**

2. *ABCD* – прямоугольная трапеция.



а) Найдите площадь трапеции *ABCD*. **2 б**

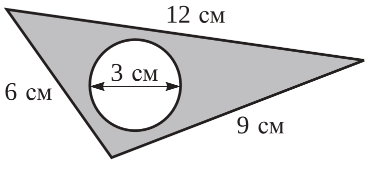
б) Вычислите *AP*. **2 б**

в) Найдите площадь закрашенной части рисунка. **4 б**

3. Рассмотрите рисунок. Найдите:

а) площадь круга; **3 б**

б) площадь закрашенной части рисунка. **4 б**



4. Даны точки *A*(–7, 2), *B*(–3, 10), *C*(9, 4). Найдите: а) площадь треугольника *ABC*; **4 б**
б) координаты точки *D*, если *ABCD* – прямоугольник; **4 б**
в) площадь прямоугольника *ABCD*. **3 б**

II вариант

1. Дополните:

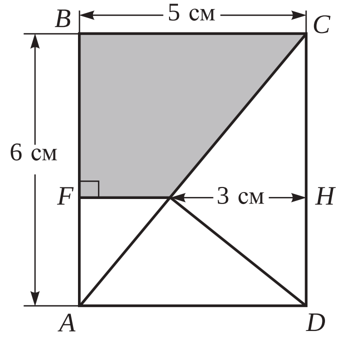
а) Площадь прямоугольника со сторонами 5 см и 7 см равна ______.

б) Площадь прямоугольного треугольника с катетами 14 см и 4 см равна ______.

в) Площадь параллелограмма с одной из сторон 12 см высотой 6 см, проведенной к этой стороне, равна ______.

г) Площадь ромба с диагоналями 11 см и 8 см равна ______.

2. *ABCD* – прямоугольник.



а) Найдите *BF*.

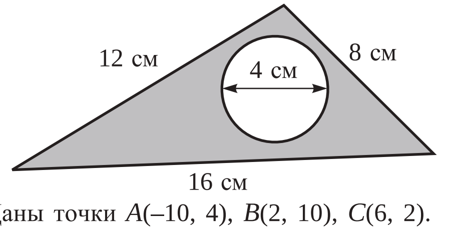
б) Вычислите площадь закрашенной части рисунка.

в) Найдите площадь треугольника *AED*.

3. Рассмотрите рисунок. Найдите:

а) площадь круга;

б) площадь закрашенной части рисунка.



4. Даны точки *A*(–10, 4), *B*(2, 10), *C*(6, 2). Найдите: а) площадь треугольника *ABC*;
б) координаты точки *D*, если *ABCD* – прямоугольник;
в) площадь прямоугольника *ABCD*.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	34–33	32–30	29–26	25–22	21–18	17–14	13–10	9–6	5–3	2–1

Глава 4 Многогранники

§ 1. Многогранники

1 Рассмотрите поверхность каждого предмета, изображенного на рисунке 1.

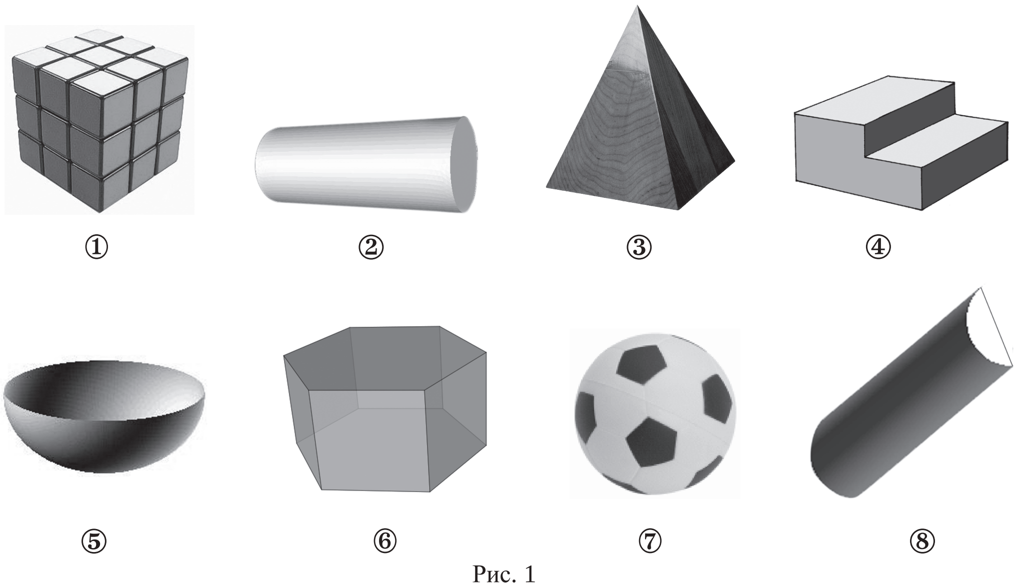


Рис. 1

а) Отберите предметы, ограниченные многоугольными поверхностями.

б) Назовите изученные ранее геометрические тела, модели которых изображены на данном рисунке.

в) Какие из известных вам геометрических тел имеют грани, ребра, вершины?

Определения

♦ **Многогранник** – это геометрическое тело, ограниченное многоугольными поверхностями.

Многоугольные поверхности называются **гранями**, стороны граней – **ребрами**, а их вершины – **вершинами** многогранника.

♦ Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

Замечание. Иногда мы называем грань многогранника по названию многоугольника, который ограничивает эту грань.

ПРИМЕНИМ

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2). DD_1C_1C – грань, $[AA_1]$ – ребро, D – вершина и $[B_1D]$ – диагональ куба.

• Назовите все остальные элементы куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

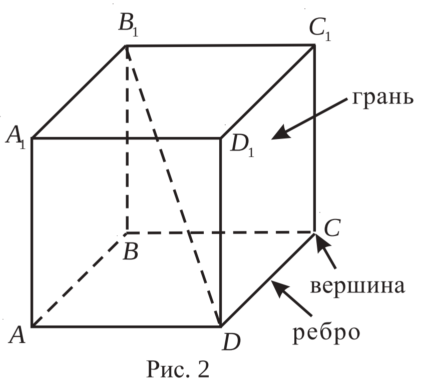


Рис. 2

2 Как правильно построить куб?

① Строим квадрат, затем из центра квадрата, двигаясь вверх, строим другой квадрат, конгруэнтный первому (рис. 3).

② Соединяем соответствующие вершины этих двух квадратов.

③ С помощью ластика „разорвем“ невидимые ребра.

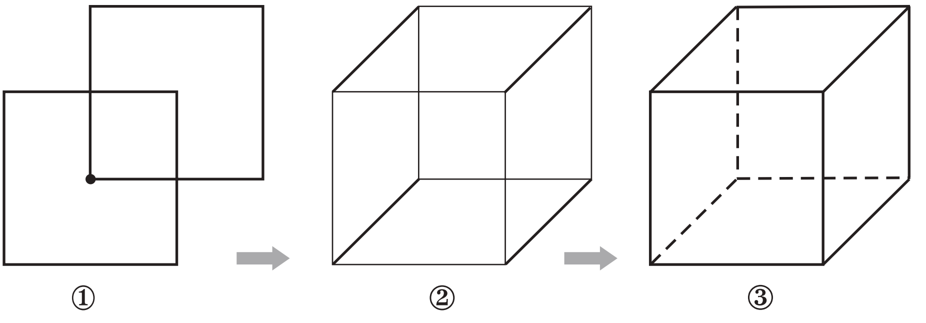


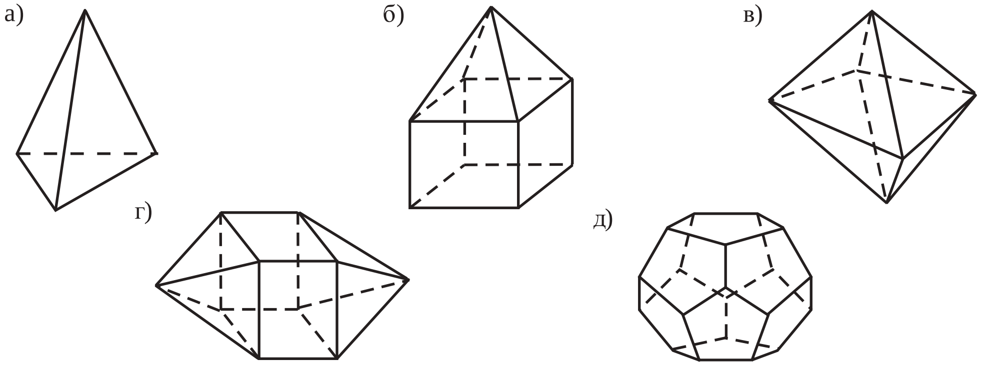
Рис. 3

• Вспомните, по какой формуле можно вычислить площадь полной поверхности и объем куба, а затем найдите площадь полной поверхности и объем куба, ребро которого равно 6 см.

Упражнения и задачи

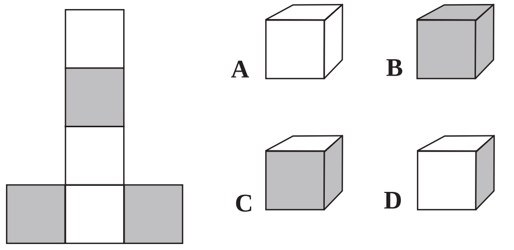
Фиксируем знания

1. Рассмотрите рисунки и найдите, сколько граней имеет каждый многогранник:



2. Сколько диагоналей имеет каждый из многогранников, изображенных в задании **1**?

3. Какие из заданных кубов могут иметь данную развертку?
Выберите правильный вариант ответа:
а) **A** и **B**;
б) **C** и **D**;
в) **A** и **D**;
г) **B** и **D**.



4. Вычислите площадь полной поверхности и объем куба, ребро которого равно 3 см.

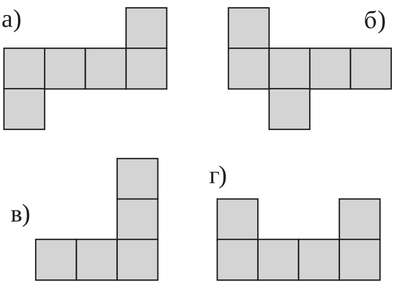
5. Найдите объем и площадь полной поверхности куба, если сумма длин его ребер равна 48 см.

6. Вычислите площадь полной поверхности и объем куба, диагональ которого равна $2\sqrt{3}$ см.

Формируем способности и применяем

7. Какова вместимость (в литрах) канистры, если она имеет форму куба с ребром 30 см?

8. Миша хочет сделать коробку в форме куба, без крышки, но с двойным дном. Какую из разверток он должен использовать?



9. Объем куба равен 125 см^3.
Вычислите площадь полной поверхности куба.

10. Найдите объем куба, если площадь его полной поверхности равна 24 см^2.

11. Сколько весит ледяной куб, ребро которого равно 20 см, если 1 дм^3 льда весит 0,9 кг?

12. Сумма площадей боковых граней куба равна 216 см^2. Найдите длину диагонали куба.

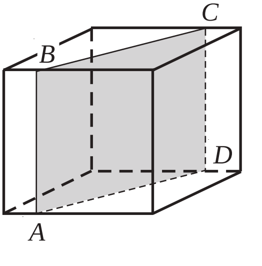
Развиваем способности и творим

13. Найдите площадь полной поверхности куба, зная, что его диагональ длиннее ребра на 1 см.

14. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AB = 4$ см. Найдите:
а) расстояние от D' до B; б) расстояние от D' до AB.

15. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка P – середина отрезка $[C'D']$ и $AP = 8\sqrt{7}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем куба.

16. Плоскость пересекает куб (как показано на рисунке) так, что полученное сечение – прямоугольник.
Аналогично покажите, как надо построить сечение, чтобы получить:
а) равносторонний треугольник;
б) правильный шестиугольник;
в) равнобокую трапецию.



17. Из 27 одинаковых маленьких кубиков построили большой куб. Сравните площадь полной поверхности большого куба с площадью тела, полученного после удаления всех маленьких кубиков, расположенных при вершинах большого куба.

§ 2. Призма

1 Любитель помечтать грезит о постройке большого дома с бассейном прямоугольной формы, размеры которого 10 м × 5 м. Чему будет равна вместимость бассейна, если его глубина составит 2 м?

Для решения этой задачи, изучим специальный класс многогранников – призмы.

Исследуйте внимательно параграф и скажите, на какое геометрическое тело похож бассейн?

2.1. Элементы призмы. Классификация призм

Напомним, что две ***плоскости параллельны***, если у них нет общих точек.

Определения

- **Призмой** называется многогранник, образованный двумя конгруэнтными параллельными гранями (**основания**) и всеми отрезками, соединяющими соответствующие точки этих двух граней. Грани призмы, отличные от оснований, называются **боковыми гранями**. Стороны боковых граней называются **боковыми ребрами**.
- Множество точек призмы, не принадлежащих ни основаниям призмы, ни боковым граням, называется **внутренней областью призмы**.

Как правило, при обозначении призмы сначала пишем буквы вершин нижнего основания, а затем буквы вершин верхнего основания.

Пример

Призма, изображенная на рисунке 4, может быть обозначена $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

$A_1B_1C_1D_1E_1$ – основание, EE_1D_1D – боковая грань, а $[EE_1]$ – боковое ребро этой призмы.

• Сколько боковых ребер у призмы, изображенной на рисунке 4?
А диагоналей?

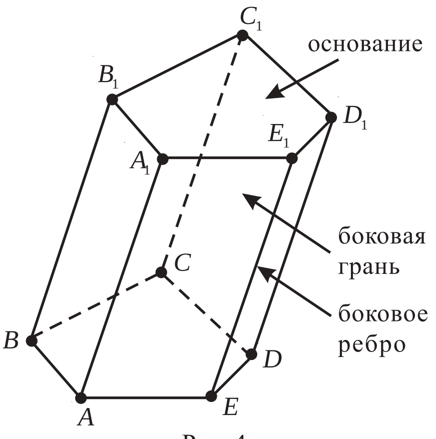


Рис. 4

На основании определения призмы может быть доказана

Теорема 1

Соответствующие стороны оснований призмы параллельны и конгруэнтны.

Таким образом, в случае призмы, изображенной на рисунке 4, получим $AE \parallel A_1E_1$ и $[AE] \equiv [A_1E_1]$, $AB \parallel A_1B_1$ и $[AB] \equiv [A_1B_1]$ и т. д.

• Применив теорему 1 и признаки параллелограмма, докажите теоремы 2 и 3.

Теорема 2

Боковые грани призмы являются параллелограммами.

Теорема 3

Все боковые ребра призмы конгруэнтны между собой и параллельны.

Определение

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости (рис. 5).

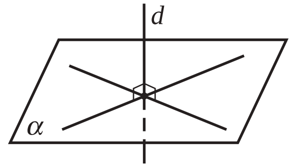
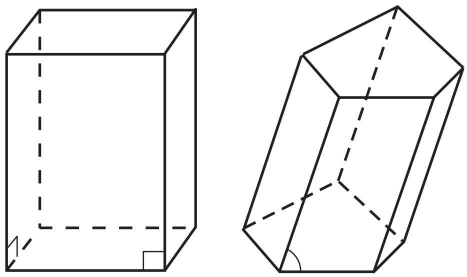


Рис. 5

Любой отрезок, перпендикулярный плоскостям оснований призмы, концы которого принадлежат данным плоскостям, называется ***высотой*** призмы. Длина этого отрезка также называется ***высотой***.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны плоскостям оснований, то призма называется ***прямой призмой*** (рис.6 а)), в противном случае – ***наклонной призмой*** (рис.6 б)). Заметим, что боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками, а боковые ребра – ее высотами.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется ***правильной призмой***.



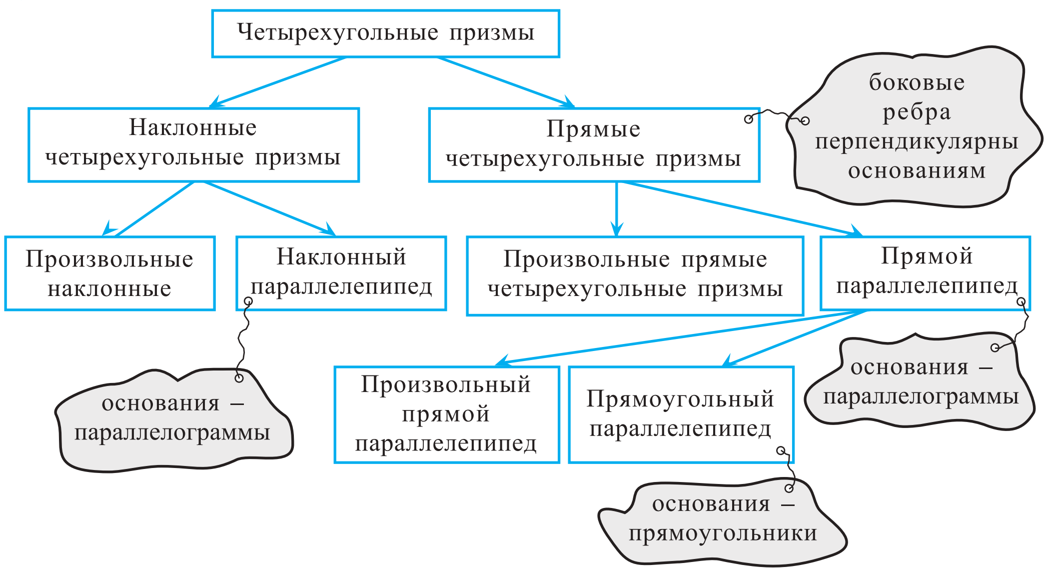
а) б)

Рис. 6

Призмы классифицируются в соответствии с многоугольниками, лежащими в основании: *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные*, *шестиугольные* и т. д.

На рисунке 6 б) изображена наклонная пятиугольная призма.

2 Рассмотрите схему и обратите внимание на классификацию четырехугольной призмы.



• К какому виду четырехугольных призм относится правильная четырехугольная призма? Обоснуйте.

ПРИМЕНИМ

3 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA'=10$ см, $AD=8$ см, $DC=6$ см (рис. 7). Найдите A_1C.

Решение:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (1), → так как $[AC]$ – диагональ прямоугольника $ABCD$.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2$ (2), → так как ΔA_1AC прямоугольный, с прямым углом A.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AD^2 + DC^2$. → подставим (1) в (2).

Deci,

$A_1A = \sqrt{10^2+8^2+6^2} = \sqrt{200} =$ → $\sqrt{200} = \sqrt{100\cdot 2} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

$=10\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $10\sqrt{2}$ см.

Теорема 4 (Теорема Пифагора в пространстве)

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех линейных измерений этого параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (рис. 8)}.$$

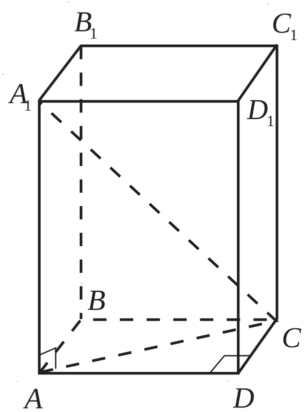


Рис. 7

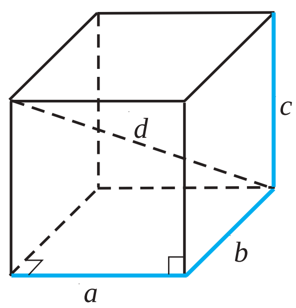


Рис. 8

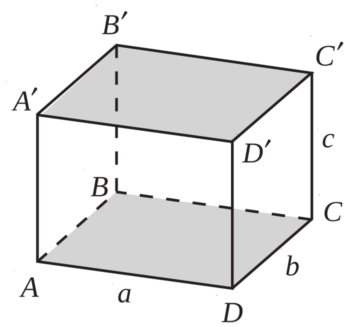


Рис. 9

2.2. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы

4 а) Начертите развертку прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке 9.

б) Вычислите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда.

Решение:

а) На рисунке 10 изображена развертка параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.

б) Пусть $\mathcal{A}_б$ – площадь боковой поверхности, а $\mathcal{A}_п$ – площадь полной поверхности параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.

$$\mathscr{A}_б = \mathscr{A}_{AA'D'D} + \mathscr{A}_{DD'C'C} + \mathscr{A}_{CC'B'B} + \mathscr{A}_{BB'A'A} = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = 2c(a+b).$$
$$\mathscr{A}_п = \mathscr{A}_б + \mathscr{A}_{ABCD} + \mathscr{A}_{A'B'C'D'} = \mathscr{A}_б + ab + ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$

Объединение боковых граней призмы называется ***боковой поверхностью*** призмы.

Площадь боковой поверхности призмы обозначают: $\mathscr{A}_б$.

Площадь основания призмы обозначается: $\mathscr{A}_{осн}$.

Площадь полной поверхности равна сумме площади боковой поверхности и площадей ее оснований и обозначается: $\mathscr{A}_п$.

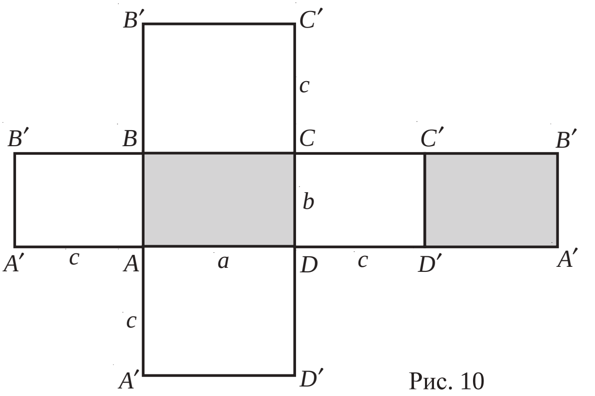
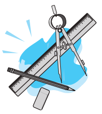


Рис. 10

Теорема 5

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c, вычисляется по формуле $\mathscr{A}_п = 2(ab + ac + bc)$ (рис. 8).



Мастерская. Изготовьте из картона правильную шестиугольную призму, боковые ребра которой равны 9 см, а стороны основания – 5 см.

Теорема 6

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты призмы (или длины бокового ребра).

Докажем теорему 6.

Условие:

Пусть a_1, a_2, ..., a_n – стороны основания прямой призмы и h – высота призмы (рис. 11).

Заключение:

$\mathscr{A}_б = P \cdot h$, где $P = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Доказательство:

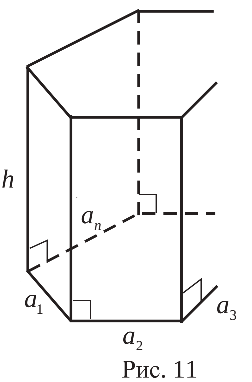


Рис. 11

① Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

② $\mathscr{A}_б = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + ... + \mathscr{A}_n$, где $\mathscr{A}_i$ – площадь боковой грани с измерениями a_i и h, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

③ $\mathscr{A}_i = a_i \cdot h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (согласно ① и ②).

④ Подставив ③ в ②, получим:

$$\mathscr{A}_б = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + ... + a_n \cdot h, \quad i \in \{1, 2, ..., n\},$$
$$\mathscr{A}_б = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot h = P \cdot h \quad (ч.т.д.).$$ ►

5 Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого $a = 4$ см, $b = 3$ см, $c = 5$ см.

Решение:

Основание параллелепипеда „вмещает“ $4 \cdot 3 = 12$ (квадратов), площадь каждого квадрата равна 1 см^2 (рис. 12). На каждый квадрат можно установить кубик, ребро которого 1 см. Таким образом, основание параллелепипеда „вмещает“ 12 кубиков. Так как высота этого слоя равна 1 см, а высота параллелепипеда – 5 см, то параллелепипед состоит из 5 слоев. Следовательно, объем прямоугольного параллелепипеда равен:

$$12 \cdot 5 = 60\ (\text{см}^3).$$

Ответ: 60 см^3.

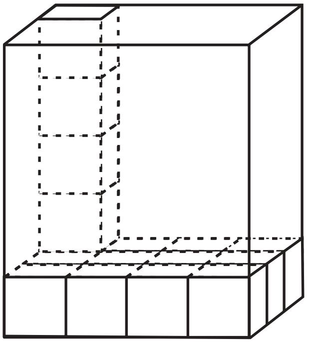


Рис. 12

Обобщив результат задачи, получим

Теорема 7

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его линейных измерений: $\mathcal{V} = abc$ (рис. 13).

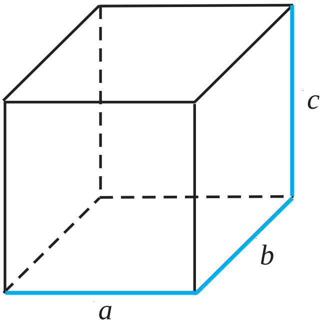


Рис. 13

Так как основание прямоугольного параллелепипеда является прямоугольником, то формулу из теоремы 7 можно записать следующим образом:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{осн}} \cdot c \quad (*),$$

где $\mathcal{A}_{\text{осн}} = a \cdot b$ – площадь основания параллелепипеда.

Более того, можно доказать, что формула $(*)$ верна для любой призмы. Следовательно, имеет место

Теорема 8

Объем любой призмы равен произведению ее основания на высоту.

ПРИМЕНИМ

6 Основания призмы – параллелограммы. Одна из сторон параллелограмма равна 6 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 4 см. Высота призмы – 14 см. Найдите объем призмы.

Решение:

Пусть $ABCDA'B'C'D'$ – данная призма (рис. 14). Тогда $\mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h$, где h – высота призмы.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = BM \cdot AD = 6 \cdot 4 = 24\ (\text{см}^2).$$

$$\mathcal{V}_{\text{призмы}} = 24 \cdot 14 = 336\ (\text{см}^3).$$

Ответ: 336 см^3.

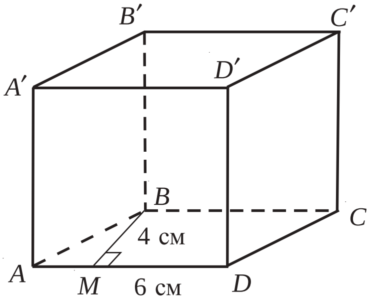


Рис. 14

7 Решение задачи **1** (см. начало параграфа):

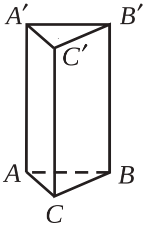
Вместимость бассейна равна объему прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 5м, 10 м и 2 м. Значит, $\mathcal{V} = 5\text{ м} \cdot 10\text{ м} \cdot 2\text{ м} = 100\text{ м}^3$.

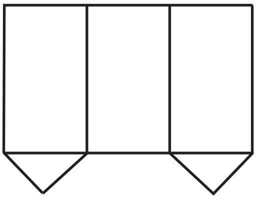
Ответ: 100 м^3.

Упражнения и задачи

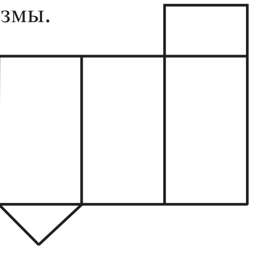
Фиксируем знания

1. Определите развертку треугольной призмы.

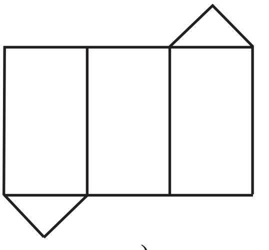




а)



б)



в)

2. Начертите развертку прямой правильной треугольной призмы, у которой:
а) сторона основания равна 2 см и высота – 4 см;
б) сторона основания равна 3 см и высота – 2 см.

3. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните словом *Да*, если геометрическое тело имеет указанное свойство.

	Четырех-угольная призма (произ-вольная)	Прямо-угольная четырех-угольная призма	Правиль-ная четырех-угольная призма	Паралле-лепипед (произ-вольный)	Прямой паралле-лепипед (произ-вольный)	Прямо-угольный паралле-лепипед	Куб
В основании – четырехугольник	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да
Боковые ребра перпендикулярны плоскости основания		Да			Да		
В основании – параллелограмм							
В основании – прямоугольник							
Боковые грани – параллелограммы							
В основании – квадрат							
Боковые грани – квадраты							

4. Найдите площадь полной поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны 6 см и 7 см, а высота – 5 см.

5. Вычислите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если сторона его основания равна 8 см, площадь основания – 40 см^2, а объем параллелепипеда – 240 см^3.

Формируем способности и применяем

6. Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если сторона его основания равна 4 см, площадь основания – 24 см^2, а объем – 168 см^3.

7. Периметр основания прямоугольного параллелепипеда равен 40 см, а площадь его боковой поверхности – 400 см^2. Найдите объем параллелепипеда, зная, что длина его основания на 4 см больше ширины.

8. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 90 см^3. Вычислите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда, если стороны его основания равны 3 см и 5 см.

9. Вычислите площадь боковой поверхности и объем правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 6 см, а высота – 7 см.

10. Объем правильной треугольной призмы равен 36 см^3. Вычислите площади боковой и полной поверхностей призмы, если сторона ее основания равна 4 см.

11. Все ребра прямой треугольной призмы равны $2\sqrt{3}$ см. Вычислите объем призмы.

12. Площадь основания правильной треугольной призмы равна $16\sqrt{3}$ см^2. Вычислите площадь полной поверхности и объем призмы, зная, что высота призмы в два раза меньше длины стороны основания.

13. Зная, что сторона основания правильной треугольной призмы равна 3 см, а площадь боковой поверхности – 45 см^2, найдите объем этой призмы.

14. Периметр основания правильной треугольной призмы равен 15 см. Вычислите площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 7 см.

15. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны 1 см, 2 см, 3 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

16. Вычислите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 4 см, а высота – 7 см.

17. Вычислите объем правильной четырехугольной призмы, площадь основания которой равна 25 см^2, а площадь боковой поверхности – 160 см^2.

18. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а ее объем равен 432 см^3. Вычислите площади боковой и полной поверхностей призмы.

19. Металлический стержень имеет форму правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 10 см, а высота 1м. Вычислите массу стержня, зная, что плотность металла равна 7600 кг/м^3.

20. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна 13 см. Зная, что площадь основания призмы равна 25 см^2, найдите ее объем и площадь полной поверхности.

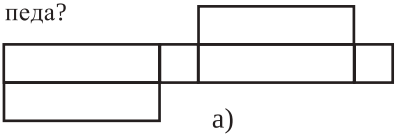
21. Объем правильной четырехугольной призмы равен 128 см^3, а ее высота – 8 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей.

22. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 3 см, а ее высота – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы.

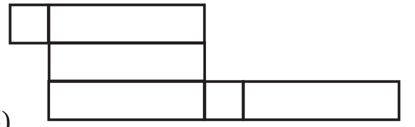
23. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если площадь ее основания равна $54\sqrt{3}$ см^2, а объем – 324 см^3.

24. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, высота которой равна 5 см, а площадь боковой поверхности – 120 см^2.

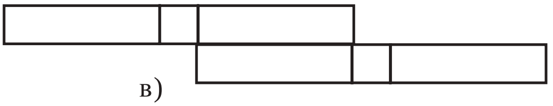
25. Какие из следующих чертежей не являются развертками прямоугольного параллелепипеда?



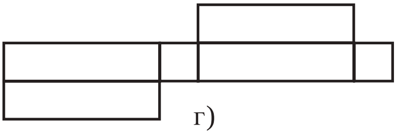
а)



б)

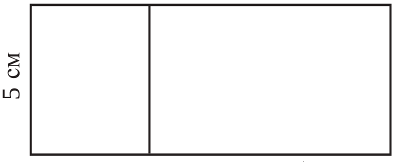


в)

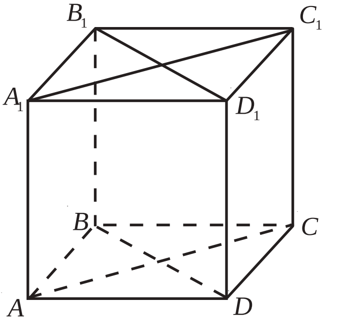


г)

26. На рисунке изображены две грани развертки прямоугольного параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



27. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда соответственно равны $\sqrt{41}$ см, $4\sqrt{26}$ см и $5\sqrt{17}$ см. Найдите отношение объема параллелепипеда к длине его диагонали.



28. Периметр основания правильной шестиугольной призмы равен 18 см, а площадь боковой поверхности – $162\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем призмы.

29. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Найдите площадь боковой поверхности, если $\mathscr{A}_{AA_1C_1C} = 3$ см^2, $\mathscr{A}_{BB_1D_1D} = 4$ см^2.

30. Найдите площади боковой и полной поверхностей правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 2 см, а объем $60\sqrt{3}$ см^3.

31. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны 6 м^2, 6 м^2 и 4 м^2. Найдите объем параллелепипеда.

Развиваем способности и творим

32. Бидон в форме прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 10 см, 15 см и 20 см, заполнен водой. Содержимое бидона перелили в сосуд кубической формы, ребро которого равно 50 см. Чему будет равен уровень воды в сосуде?

33. Измерения прямоугольного параллелепипеда прямо пропорциональны числам 2, 3, 5, а его объем равен 240 см^3. Найдите:

а) диагонали параллелепипеда; б) площадь полной поверхности параллелепипеда.

34. По боковой поверхности коробки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, обозначенного $ABCDA'B'C'D'$, ползет муравей из точки A в точку C' – по наикратчайшему пути. Зная, что AB = 8 см, BC = 4 см и $AA' = 12\sqrt{3}$ см, найдите:

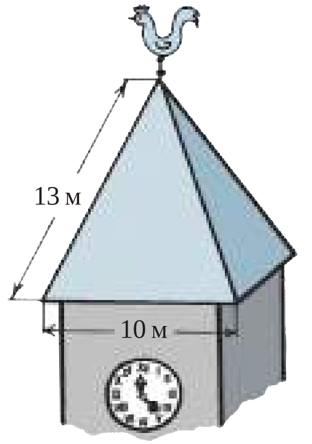
а) площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем параллелепипеда;

б) длину пути муравья.

35. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$, у которой AB = 8 см, а диагональ боковой грани равна 10 см. Вычислите площадь полной поверхности призмы и ее объем.

* Дополнительный материал

§ 3. Пирамида



1 Крыша башни имеет форму четырехугольной пирамиды, стороны основания которой конгруэнтны и равны 10 м, а конгруэнтные боковые ребра равны 13 м. Сколько краски необходимо для покраски данной крыши, если одной банки хватает на 10 м^2 поверхности?

Для решения задачи изучим другой вид многогранников – *пирамиды*.

3.1. Элементы пирамиды. Классификация пирамид

Определение

Пирамидой называется многогранник, образованный многоугольной поверхностью, называемой **основанием**, точкой, не принадлежащей основанию (**вершина пирамиды**), и всеми отрезками, соединяющими вершину пирамиды с точками основания.

Отрезок, проведенный из вершины пирамиды перпендикулярно основанию, называется ***высотой*** пирамиды. Длина этого отрезка также называется ***высотой*** пирамиды.

Боковые грани пирамиды являются треугольниками с общей вершиной в вершине пирамиды. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются ***боковыми ребрами***.

Множество точек пирамиды, не принадлежащих ни основанию пирамиды, ни боковым граням, называется ***внутренней областью пирамиды***.

Обычно, обозначая пирамиду, вначале пишут букву вершины пирамиды, а затем буквы вершин основания этой пирамиды.

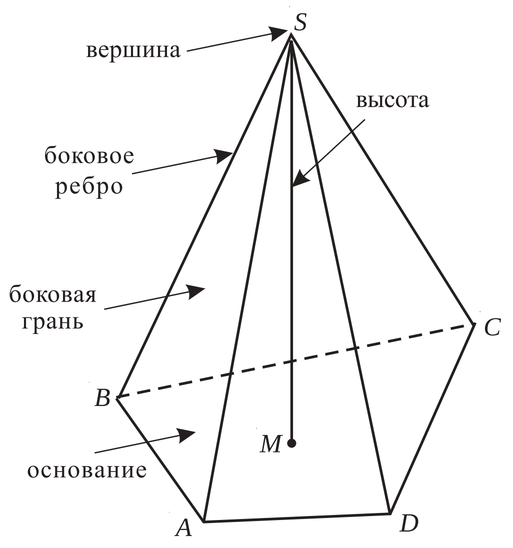


Рис. 15

Пример

Пирамида, изображенная на рисунке 15, может быть обозначена $SABCD$.

$ABCD$ – основание, S – вершина, ABS – боковая грань, $[SB]$ – ребро пирамиды.

Если отрезок $[SM]$ перпендикулярен основанию, то $[SM]$ – высота пирамиды $SABCD$.

Если основание высоты пирамиды совпадает с центром основания пирамиды (с точкой, равноудаленной от вершин основания), то пирамида называется ***прямой пирамидой***.

• Применив теорему Пифагора, докажите

Теорема 9
Боковые ребра прямой пирамиды конгруэнтны.

Пирамиды классифицируются в соответствии с многоугольником, лежащим в основании: *треугольные* (*тетраэдры*), *четырехугольные*, *пятиугольные*, *шестиугольные*, *семиугольные* и т. д.

Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется ***правильной пирамидой***.

Высота боковой грани, проведенная из вершины правильной пирамиды, называется ***апофемой*** этой пирамиды.

• Несмотря на то, что треугольная пирамида называется еще и ***тетраэдром***, термин *правильный тетраэдр* не используется в случае любой правильной треугольной пирамиды.

Определение
Тетраэдр, все ребра которого конгруэнтны, называется **правильным тетраэдром**.

• Сформулируйте несколько свойств правильного тетраэдра.

Пример

Грани правильного тетраэдра являются конгруэнтными равносторонними треугольниками.

2 Как правильно построить пирамиду?

① Строим с помощью линейки и карандаша основание пирамиды (рис. 16).

② Отмечаем вершину пирамиды. В случае, правильной пирамиды, находим центр основания, затем из этого центра проводим вертикальную линию и отмечаем на ней вершину пирамиды.

③ Соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

④ С помощью ластика „ разрываем” невидимые ребра и стираем вспомогательные линии.

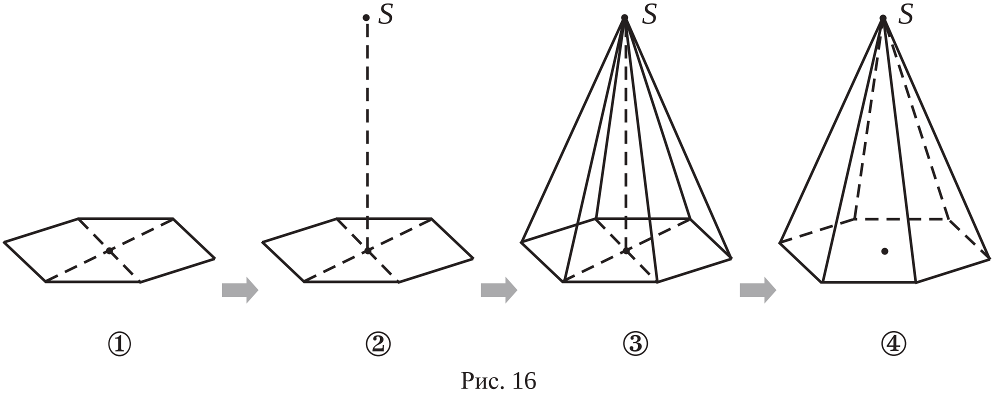


Рис. 16

3.2. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем пирамиды

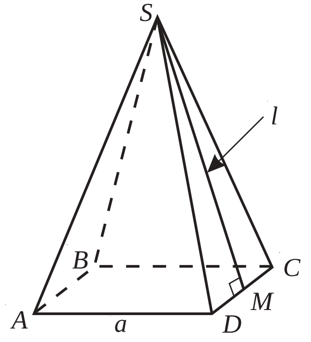


Рис. 17

а) На рисунке 17 изображена правильная пирамида $SABCD$. Нарисуйте схематически ее развертку.

б) Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если сторона ее основания равна a, а апофема пирамиды – l.

Решение:

а) На рисунке 18 изображена развертка пирамиды $SABCD$.

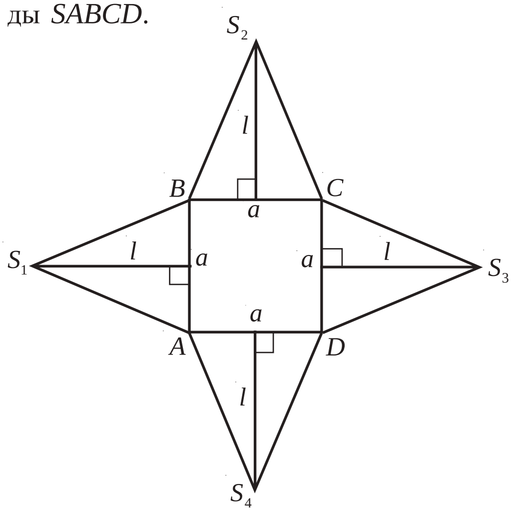


Рис. 18

Очевидно, что треугольники AS_1B, BS_2C, CS_3D, DS_4A являются равнобедренными и конгруэнтными между собой.

б) Площадь боковой поверхности ($\mathscr{A}_б$) пирамиды равна сумме площадей равнобедренных треугольников, изображенных на рисунке 18.

$$\mathscr{A}_{AS_1B} = \frac{1}{2}a \cdot l.$$

Значит, $\mathscr{A}_б = 4 \cdot \frac{1}{2}al = 2al.$

Ответ: $\mathscr{A}_б = 2al.$

Замечание. Так как периметр основания пирамиды равен $P = 4a$, то ответ задачи можно записать следующим образом:

$$\mathscr{A}_б = \frac{1}{2}P \cdot l,$$

где P – периметр основания пирамиды.

Объединение боковых граней пирамиды называют ***боковой поверхностью*** пирамиды.

Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и ее основания.

Теорема 10

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды (рис. 19).

$$\mathscr{A}_б = \frac{1}{2}P \cdot l,$$

где P – периметр основания.

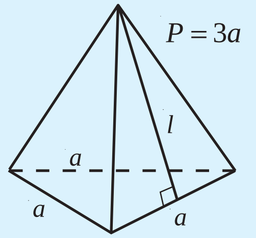


Рис. 19

ПРИМЕНИМ

• Решение задачи 1:

Для того чтобы найти площадь поверхности крыши, надо вычислить площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды *SABCD*, сторона основания которой равна 10 м, а боковое ребро – 13 м (рис. 20).

Пусть $[SM]$ – апофема пирамиды.

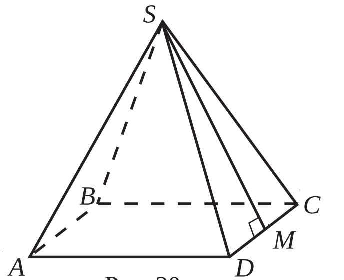


Рис. 20

$SM=\sqrt{SD^2-DM^2}$, → так как ΔSMD – прямоугольный, с прямым углом *M*.

$SM=\sqrt{13^2-5^2}=12\,(\text{м})$.

$\mathcal{S}_{\text{б}}=\dfrac{1}{2}P\cdot SM$, → *P* – периметр основания.

$\mathcal{S}_{\text{б}}=\dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot 12=240\,(\text{м}^2)$. → так как периметр основания равен 40 м.

$240:10=24$ (банки).

Ответ: 24 банки краски.

4 Чему равен объем пирамиды, рассмотренной в задаче 1?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, сначала рассмотрим следующую теорему.

Теорема 11

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на ее высоту.

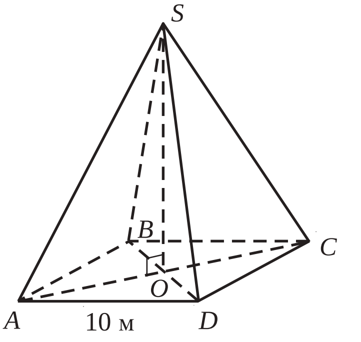


Рис. 21

ПРИМЕНИМ

• Решение задачи 4:

Вычислим объем правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* (рис. 21), сторона основания которой равна 10 м, а ребро – 13 м.

① Пусть *O* – точка пересечения диагоналей основания *ABCD*. Тогда $[SO]$ – высота пирамиды *SABCD* → так как *SABCD* – правильная пирамида.

② $AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}=5\sqrt{2}\,(\text{м})$ → так как диагональ квадрата, со стороной *a* равна $a\sqrt{2}$.

③ $SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{169-50}=\sqrt{119}\,(\text{м})$ → так как *SO* – катет прямоугольного треугольника *SOA*.

④ $\mathcal{V}_{\text{пир}}=\dfrac{1}{3}\mathcal{S}_b\cdot SO=\dfrac{1}{3}\cdot 10^2\cdot\sqrt{119}=\dfrac{100\sqrt{119}}{3}\,(\text{м}^3)$ → по теореме 11.

Ответ: $\dfrac{100\sqrt{119}}{3}$ м^3.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $9\sqrt{3}$ см^2, а ее апофема – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

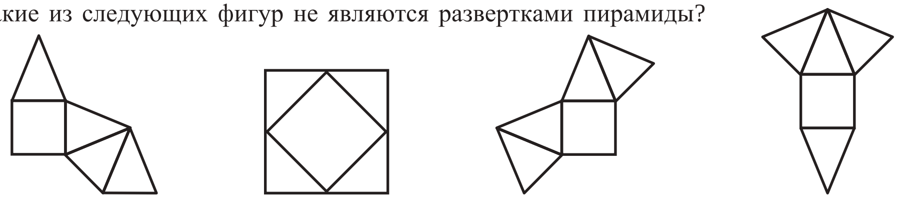
2. Периметр основания правильной треугольной пирамиды равен $18\sqrt{3}$ см, ее высота – 4 см, а апофема пирамиды – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем пирамиды.

3. Объем правильной треугольной пирамиды равен $3\sqrt{3}$ см^3, ее высота – 1 см, а апофема пирамиды – 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $36\sqrt{3}$ см^2, ее апофема – 4 см, а высота пирамиды – 2 см. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды.

5. Вычислите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна 4 см, а площадь основания – $27\sqrt{3}$ см^2.

6. Какие из следующих фигур не являются развертками пирамиды?



а) б) в) г)

7. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 3 см, ее высота – $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см, а площадь боковой поверхности – 18 см^2. Найдите объем пирамиды.

8. Вычислите площадь боковой поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, ее апофема – 5 см, а высота – 4 см.

9. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см, периметр основания пирамиды – 40 см, ее апофема – 13 см. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды.

10. Найдите площадь полной поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды, площадь основания которой 36 см^2, ее апофема – 6 см, а высота $3\sqrt{3}$ см.

11. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, ее апофема – 5 см, а высота – 3 см. Вычислите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем пирамиды.

12. Найдите площадь полной поверхности и объем правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4 см, ее высота – 2 см, а апофема – 4 см.

Формируем способности и применяем

13. Дана правильная четырехугольная пирамида. Обозначим: a – сторона основания, l – апофема, P – периметр основания, $\mathscr{A}_{\text{б}}$ – площадь боковой поверхности, $\mathscr{A}$ – площадь полной поверхности. Найдите:

а) P, $\mathscr{A}_{\text{б}}$ и $\mathscr{A}$, если $a=6$ м, $l=12$ м;

б) l, P и $\mathscr{A}_{\text{б}}$, если $a=13$ м, $\mathscr{A}=689$ м^2;

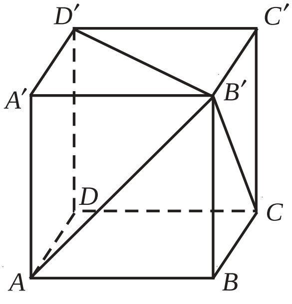
в) a, P, $\mathscr{A}$, если $l=16$ м, $\mathscr{A}_{\text{б}}=288$ м^2;

г) a, l, $\mathscr{A}$, если $P=44$ м, $\mathscr{A}_{\text{б}}=396$ м^2;

д) a, k, P, если $\mathscr{A}_{\text{б}}=352$ м^2, $\mathscr{A}=416$ м^2.

14. Площадь основания правильной шестиугольной пирамиды равна $48\sqrt{3}$ см^2, а апофема пирамиды – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

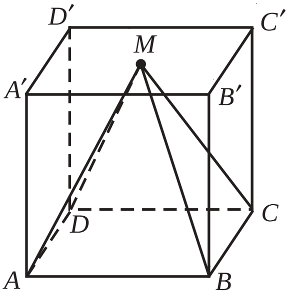
15. Пирамида Хеопса первоначально имела высоту 147,5 м, а в основании – квадрат со стороной 232 м. Отношение длины апофемы VM к отрезку OM, где V – вершина пирамиды, а O – центр основания, равно знаменитому числу, которое использовалось еще в древней архитектуре. Найдите это число и сравните его с $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



16. Длина ребра куба, изображенного на рисунке, равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислите высоту тетраэдра $AA'D'B'$ ($A'D'B'$ – основание тетраэдра).

17. Объем правильной шестиугольной пирамиды равен $48\sqrt{3}$ см^3, высота пирамиды – 3 см, а ее апофема конгруэнтна стороне основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

18. Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна 192 см^2, ее высота – 4 см, а апофема пирамиды конгруэнтна стороне основания. Вычислите объем пирамиды.



19. Длина ребра куба, изображенного на рисунке, равна 16 см. Вершина M пирамиды $MABCD$ – центр грани $A'B'C'D'$ куба. Найдите отношение площади боковой поверхности к площади основания пирамиды.

20. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды конгруэнтна высоте пирамиды. Вычислите площадь боковой поверхности и объем пирамиды, если ее высота равна 10 см, а апофема – $5\sqrt{7}$ см.

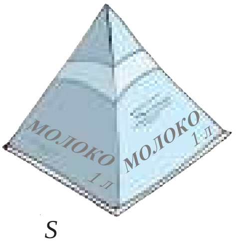
Развиваем способности и творим

21. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, а длина стороны основания – 12 см. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды.

22. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, у которого $AB = 4$ см, а G_1, G_2, G_3 – центры тяжести треугольников DBC, DAC и соответственно DAB.
а) Вычислите площадь полной поверхности и объем тетраэдра.
б) Найдите отношение площади треугольника $G_1G_2G_3$ к площади треугольника ABC.

23. Высота правильного тетраэдра равна 8 см. Найдите объем тетраэдра.

§ 4. Усеченная пирамида



1 Треугольный пакет из-под молока разрезали на уровне половины высоты пакета. Сколько молока можно налить в оставшуюся часть пакета, если вместимость целого пакета равна 1 литру?

Решение:

Предположим, что пакет имеет форму треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 22).

Задачу можно решить двумя способами.

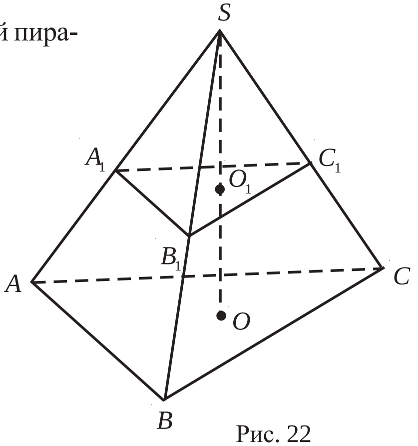


Рис. 22

Способ I. Найдем объем тела, полученного из пирамиды $SABC$ после того, как от нее отрезали пирамиду $SA_1B_1C_1$ с основанием $A_1B_1C_1$, параллельным основанию ABC и пересекающим высоту SO в ее середине – точке O_1.

Способ II. Сначала находим, на сколько уменьшилась вместимость пакета, то есть объем пирамиды $SA_1B_1C_1$.

Объем пирамиды $SABC$ вычисляется по формуле $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\mathscr{S}_{\text{Осн}}\cdot h$, где $\mathscr{S}_{\text{Осн}}$ – площадь основания ABC, а h – высота этой пирамиды.

Объем пирамиды $SA_1B_1C_1$ равен $\mathscr{V}_1=\frac{1}{3}\mathscr{S}_{\text{осн}}\cdot h_1$, где $\mathscr{S}_{\text{осн}}$ – площадь основания $A_1B_1C_1$, а $h_1=\frac{h}{2}$.

Применив подобие треугольников, можно доказать, что $\mathscr{S}_{\text{осн}}=\frac{1}{4}\mathscr{S}_{\text{Осн}}$.

Следовательно, $\mathscr{V}_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\mathscr{S}_{\text{Осн}}\frac{h}{2}=\frac{\mathscr{S}_{\text{Осн}}h}{24}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\mathscr{S}_{\text{Осн}}h=\frac{1}{8}\mathscr{V}$.

Значит, объем тела $ABCA_1B_1C_1$ равен $\mathscr{V}-\mathscr{V}_1=\mathscr{V}-\frac{1}{8}\mathscr{V}=\frac{7}{8}\mathscr{V}$.

Таким образом, в пакет можно налить $\frac{7}{8}$ л молока.

Ответ: $\frac{7}{8}$ л.

Замечание. Позже мы решим эту задачу ***способом I***. Для этого изучим другой тип многогранников – ***усеченные пирамиды***.

4.1. Элементы усеченной пирамиды

Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая пирамиду, разбивает ее на два многогранника – один из них ***усеченная пирамида***, а другой – пирамида поменьше.

Параллельные грани усеченной пирамиды называются ***основаниями***.

Любой отрезок, перпендикулярный основаниям и соединяющий точки этих оснований, называется ***высотой*** усеченной пирамиды. Длина этого отрезка также называется ***высотой*** усеченной пирамиды.

Основания усеченной пирамиды являются подобными многоугольниками. Боковые грани – трапеции.

Обычно, при обозначении усеченной пирамиды сначала пишем буквы вершин бóльшего основания, а затем буквы вершин меньшего основания.

Пример

Усеченная пирамида, изображенная на рисунке 23, может быть обозначена $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ – соответственно большее и меньшее основания, AA_1E_1E – боковая грань, а $[MM_1]$ – апофема этой усеченной пирамиды.

Если отрезок $[OO_1]$ перпендикулярен основаниям, то $[OO_1]$ – высота усеченной пирамиды.

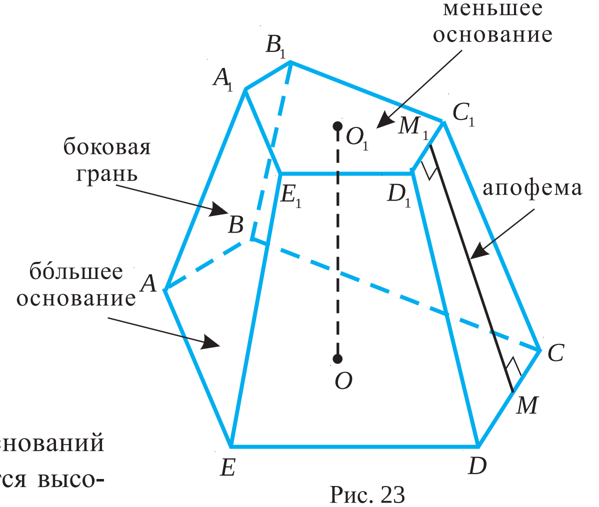


Рис. 23

Отрезок, соединяющий центры оснований ***прямой усеченной пирамиды***, является высотой этой усеченной пирамиды.

Правильной усеченной пирамидой является прямая усеченная пирамида, основания которой – правильные многоугольники. Ее боковые грани – конгруэнтные трапеции.

Высоты боковых граней правильной усеченной пирамиды называются ***апофемами*** усеченной пирамиды.

Усеченные пирамиды классифицируются в соответствии с многоугольником, лежащим в основании: *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные*, *шестиугольные*, *семиугольные* и т. д.

Усеченная пирамида имеет развертку.

2 Как правильно построить усеченную пирамиду?

① Строим с помощью линейки и карандаша пирамиду (рис. 24; см. § 3).

② Отмечаем на боковом ребре точку и через нее проводим многоугольник, стороны которого соответственно параллельны сторонам основания пирамиды.

③ С помощью ластика сотрем боковые ребра меньшей пирамиды.

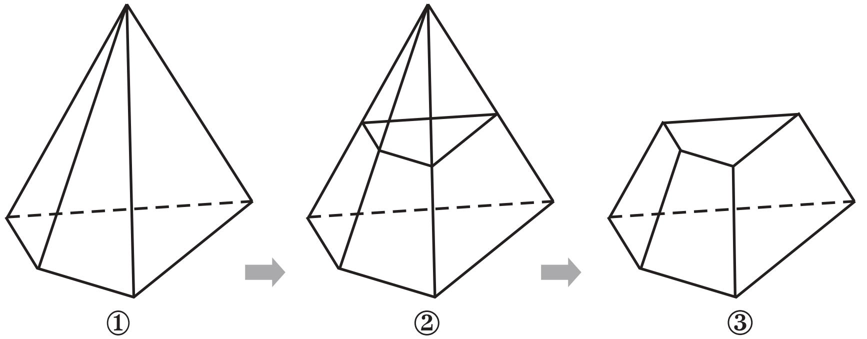


Рис. 24

3 (дополнительный материал). Вычислите объем усеченной пирамиды, зная площади оснований $\mathcal{A}_{\text{Осн}}$ и $\mathcal{A}_{\text{осн}}$, и высоту h усеченной пирамиды.

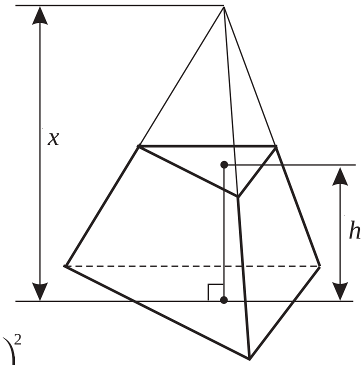


Рис. 25

Решение:

Пусть x – высота пирамиды, из которой получена усеченная пирамида (рис. 25).

Объем $\mathcal{V}$ усеченной пирамиды равен разности объемов двух пирамид: одной с основанием $\mathcal{A}_{\text{Осн}}$ и высотой x, а другой с основанием $\mathcal{A}_{\text{осн}}$ и высотой $x-h$.

Из подобия этих пирамид следует, что $\dfrac{\mathcal{A}_{\text{осн}}}{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}=\left(\dfrac{x-h}{x}\right)^2$.

Значит, $x=\dfrac{h\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}-\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}}}$.

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{Осн}}x-\frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн}}(x-h)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\mathcal{A}_{\text{Осн}}\cdot\frac{h\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}-\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}}}-\mathcal{A}_{\text{осн}}\left(\frac{h\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}-\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}}}-h\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}h\left(\mathcal{A}_{\text{Осн}}\frac{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}-\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}}}-\mathcal{A}_{\text{осн}}\frac{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}-\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}}}+\mathcal{A}_{\text{осн}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\left[(\mathcal{A}_{\text{Осн}}-\mathcal{A}_{\text{осн}})\frac{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}}{\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}-\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}}}+\mathcal{A}_{\text{осн}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}h[(\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}+\sqrt{\mathcal{A}_{\text{осн}}})\cdot\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}}+\mathcal{A}_{\text{осн}}]=\frac{1}{3}h(\mathcal{A}_{\text{Осн}}+\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}\mathcal{A}_{\text{осн}}}+\mathcal{A}_{\text{осн}}).$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}h(\mathcal{A}_{\text{Осн}}+\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}\mathcal{A}_{\text{осн}}}+\mathcal{A}_{\text{осн}})$.

ПРИМЕНИМ

• *Решение задачи* **1** *способом I* (см. начало параграфа):

Пусть $\mathcal{V}$ – объем усеченной пирамиды, H – высота пирамиды. Значит,

$$\mathcal{A}_{\text{осн}}=\frac{1}{4}\mathcal{A}_{\text{Осн}},\quad h=\frac{H}{2}\quad (*).$$

Подставляя $(*)$ в формулу – ответ задачи **3**, получим

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\left(\mathcal{A}_{\text{Осн}}+\sqrt{\mathcal{A}_{\text{Осн}}\cdot\frac{1}{4}\mathcal{A}_{\text{Осн}}}+\frac{1}{4}\mathcal{A}_{\text{Осн}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\left(\mathcal{A}_{\text{Осн}}+\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\text{Осн}}+\frac{1}{4}\mathcal{A}_{\text{Осн}}\right)=\frac{1}{3}\cdot H\cdot\frac{7}{8}\mathcal{A}_{\text{Осн}}=\frac{7}{8}\mathcal{V}_{\text{пир}},$$

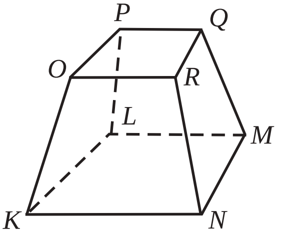
где $\mathcal{V}_{\text{пир}}$ – объем пирамиды. Следовательно, в пакет можно налить $\dfrac{7}{8}$ л молока.

Упражнения и задачи

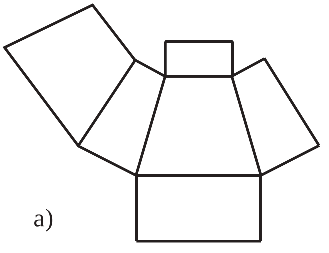
Фиксируем знания

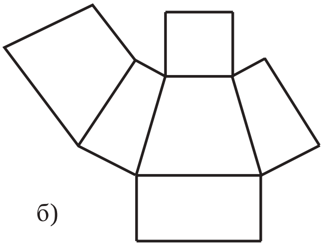
1. Начертите усеченную пирамиду:
а) треугольную;
б) четырехугольную;
в) пятиугольную.

2. На рисунке изображена усеченная пирамида. Укажите:
а) основания;
б) боковые грани;
в) боковые ребра.



3. Зная свойства, которыми обладают основания и боковые грани усеченной пирамиды, определите, какая из следующих разверток является разверткой четырехугольной усеченной пирамиды.


а)


б)

4. Начертите развертку усеченной пирамиды:
а) правильной треугольной;
б) четырехугольной, в основаниях которой лежат параллелограммы;
в) четырехугольной, в основаниях которой лежат трапеции.

5. В многограннике две грани параллельны, а остальные являются трапециями. Определите, является ли многогранник усеченной пирамидой, если параллельные грани:
а) подобные треугольники; б) равносторонние треугольники;
в) квадраты; г) правильные многоугольники с одинаковым числом сторон.

Формируем способности и применяем

6. Длина бокового ребра четырехугольной усеченной пирамиды равна 26 см. Найдите высоту усеченной пирамиды, если длины диагоналей оснований усеченной пирамиды равны 30 см и 10 см.

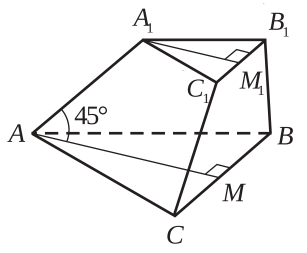
7. Найдите длину бокового ребра правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны основания которой равны 10 см и 4 см, а апофема усеченной пирамиды – 4 см.

8. Длина бокового ребра правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 26 см. Найдите высоту усеченной пирамиды, если стороны оснований равны 10 см и 2 см.

9. Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна 10 см. Найдите длину бокового ребра усеченной пирамиды, если стороны оснований равны 40 см и 10 см.

10. Найдите высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, сторона большего основания которой равна 25 см, боковое ребро – 26 см, а апофема усеченной пирамиды равна 24 см.

11. Найдите высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны основания которой равны 10 см и 6 см, а диагональ усеченной пирамиды равна 12 см.

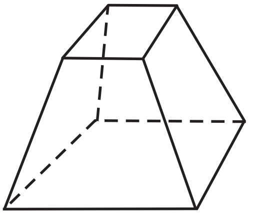


12. Боковое ребро правильной треугольной усеченной пирамиды образует с высотой большего основания угол в 45° (см. рисунок). Найдите площадь фигуры AA_1M_1M, если стороны оснований усеченной пирамиды равны 10 см и 6 см.

Развиваем способности и творим

13. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды образует с диагональю большего основания угол в 45°. Найдите длину диагонали усеченной пирамиды, если стороны ее оснований равны 24 см и 7 см.

14. Найдите высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 8 см и 2 см, а площадь сечения, проходящего через параллельные диагонали оснований усеченной пирамиды, равна $20\sqrt{2}$ см^2.



15. Рассмотрите рисунок. При помощи линейки без делений определите, верно ли изображена усеченная пирамида.

16*. Вычислите высоту правильной шестиугольной усеченной пирамиды, сторона меньшего основания которой равна 4 см, а большего – 12 см, а объем равен 936 см^3.

17*. Докажите, что площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему усеченной пирамиды.

Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

1. Найдите сумму величин углов, образованных гранями:
а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной призмы; в) пятиугольной призмы.

2. Вычислите высоту правильного тетраэдра, ребро которого равно 10 см.

3. Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого равно 8 см.

4. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 7 см, 4 см, 8 см. Найдите площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

5. Объем куба равен 216 см^3. Вычислите площадь полной поверхности куба.

6. Дана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна 4 см, а высота – 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

7. Боковыми гранями правильной шестиугольной призмы являются квадраты, а сторона основания равна 2 см. Вычислите площадь боковой поверхности и объем призмы.

8. Дана прямая призма $ABCDEF$, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ABC. Высота призмы конгруэнтна гипотенузе AC и $AB = 12$ см, $BC = 9$ см. Вычислите:
а) площадь полной поверхности и объем призмы;
б) площадь треугольника EBK, где точка K – середина ребра AC.

9. Сколько всего диагоналей в:
а) пятиугольной усеченной пирамиде;
б) усеченной пирамиде, основания которой являются n-угольниками?

* Дополнительный материал

10. Пусть $ABCA'B'C'$ – правильная треугольная призма. Зная, что расстояние между центрами двух боковых граней равно 4 см, а площадь боковой поверхности – $96\sqrt{3}$ см^2, вычислите:
а) высоту призмы; б) объем призмы.

11. Все ребра правильной призмы $ABCA'B'C'$ равны 3 см. Вычислите длину отрезка AD, где точка D – середина ребра $B'C'$.

12. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда, равны 15 см и 5 см, а его площадь боковой поверхности в два раза больше площади основания. Вычислите высоту и объем параллелепипеда.

13. Дан куб, диагональ которого равна 3 см. Соединив центр куба с его вершинами, получим 6 конгруэнтных пирамид. Чему равен объем каждой из этих пирамид?

14. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$. Две стороны треугольника ABC равны 17 см и 24 см, а величина угла между ними равна 30°. Зная, что высота призмы равна 12 см, найдите ее объем.

■■ Формируем способности и применяем

15. Сумма измерений прямоугольного параллелепипеда равна 24 см, длина диагонали – 18 см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

16. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, точка M – середина $[A'D']$, а точка P – середина $[AB]$. Зная, что $MP = 4\sqrt{3}$ см, вычислите длину ребра и объем куба.

17. Сумма длин ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равна 15 см, а его диагональ – $\sqrt{77}$ см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

18. Объем правильной четырехугольной призмы равен 175 см^3, а ее высота – 7 см. Вычислите длину диагонали и площадь полной поверхности призмы.

19. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 6 см, а ее высота – 8 см. Вычислите длины диагоналей призмы, площадь полной поверхности и ее объем.

20. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AB = 12$ см, $BC = 35$ см. Площадь сечения, проходящего через ребро AA' и CC', равна 370 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности и объем параллелепипеда.

■■■ Развиваем способности и творим

21. Поверхность в форме равностороннего треугольника, высота которого равна $4\sqrt{3}$ см, является разверткой тетраэдра. Вычислите площадь полной поверхности и объем тетраэдра.

22. Дана правильная треугольная пирамида $VABC$, в основании которой лежит треугольник ABC и $AB = 12\sqrt{2}$ см, $AV = 12$ см.
а) Найдите высоту треугольника ABC. б) Вычислите высоту пирамиды.
в) Найдите объем пирамиды.

23. Из пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания – 8 см, получили правильную четырехугольную усеченную пирамиду. Вычислите длину бокового ребра усеченной пирамиды, зная, что ее высота равна 4 см.

24. Площадь полной поверхности правильного тетраэдра равна $6\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем тетраэдра.

Итоговый тест

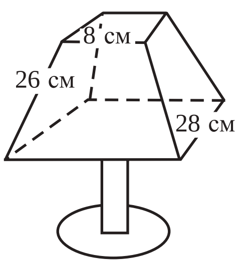
Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с высотой 20 см и сторонами основания 10 см и 15 см наполнен водой.
   а) Начертите развертку параллелепипеда в масштабе 1: 5. **3 б**
   б) Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда. **3 б**
   в) Сколько литров воды в сосуде? **3 б**
   г) Воду из данного сосуда перелили в сосуд, имеющий форму куба с ребром 20 см. На какой уровень поднялась вода в кубическом сосуде? **3 б**
   д) Найдите отношение между емкостями сосудов. **3 б**

2. Металлическое тело имеет форму правильного тетраэдра.
   а) Найдите ребро тетраэдра, если сумма всех его ребер равна 54 см. **2 б**
   б) Начертите развертку тетраэдра. **3 б**
   в) Найдите общую площадь тела. **3 б**
   г) Вычислите высоту тетраэдра. **3 б**
   д) Данное тело переплавили в правильные тетраэдры с ребрами 3 см. Сколько всего маленьких тетраэдров получили? **3 б**

3. Абажур для лампы имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды без оснований (см. рисунок) и изготовлен из ткани. Хватит ли отреза ткани в форме квадрата со стороной 50 см для изготовления данного абажура? **4 б**



II вариант

1. Ваза в виде правильной треугольной призмы со стороной основания 12 см и высотой 30 см наполовину наполнен водой.
   а) Начертите развертку призмы в масштабе 1: 3.
   б) Найдите площадь боковой поверхности призмы.
   в) Сколько литров воды в вазе?
   г) Воду из вазы перелили в сосуд, имеющий форму куба с ребром 20 см. На какой уровень поднялась вода в кубическом сосуде?
   д) Найдите отношение между емкостями сосуда и вазы.

2. Металлическое тело имеет форму правильного тетраэдра.
   а) Найдите ребро тетраэдра, если сумма всех его ребер равна 72 см.
   б) Начертите развертку тетраэдра.
   в) Найдите общую площадь тела.
   г) Вычислите высоту тетраэдра.
   д) Данное тело переплавили в правильные тетраэдры с ребрами 6 см. Сколько всего маленьких тетраэдров получили?

3. Люстра в виде правильной четырехугольной усеченной пирамиды без оснований (см. рисунок) изготовлена из стекла. Хватит ли листа стекла в форме квадрата со стороной 50 см для изготовления данной люстры?

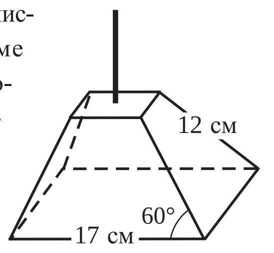


Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	33–32	31–28	27–25	24–22	21–19	18–15	14–11	10–6	5–3	2–1

Глава 5

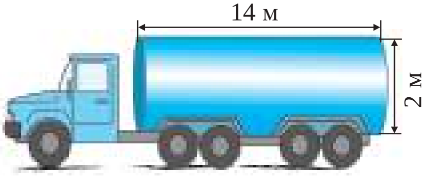
Круглые тела

На практике, кроме многогранников, встречаются тела, полностью или частично ограниченные неплоскими поверхностями: сфера, цилиндр, конус и т.д., называемые **круглыми телами**. Как и многогранники, эти тела обладают рядом интересных свойств. Например, из всех геометрических тел с одной и той же площадью поверхности шар имеет наибольший объем.

Так как поверхность круглых тел образуется (как позже можно убедиться) при полном вращении геометрических фигур вокруг некоторой прямой, эти тела называют еще **телами вращения**.

§ 1. Цилиндр (прямой круговой)

1 На автозаправке решили покрасить 10 цистерн (цилиндрической формы) – машин, перевозящих бензин. Длина каждой цистерны равна 14 м, а диаметр основания – 2 м. Сколько банок краски необходимо для этого, если одной банки хватает на покраску поверхности площадью 14 м^2?



1.1. Элементы цилиндра

Определения

- Геометрическое тело, образованное двумя конгруэнтными кругами, лежащими в параллельных плоскостях, и всеми отрезками, соединяющими соответствующие точки этих кругов, называется **круговым цилиндром** (рис. 1).
- Круги цилиндра называются **основаниями цилиндра**.

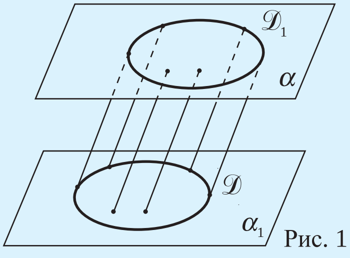


Рис. 1

Любой отрезок, перпендикулярный плоскостям оснований цилиндра, концы которого принадлежат этим плоскостям, называется ***высотой*** цилиндра. Длина этого отрезка также называется ***высотой***.

Например, на рисунке 2 изображен цилиндр, основаниями которого являются круги $\mathscr{D}(O, OM)$ и $\mathscr{D}_1(O_1, O_1M_1)$.

Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_1$ – окружности, ограничивающие круги $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$.

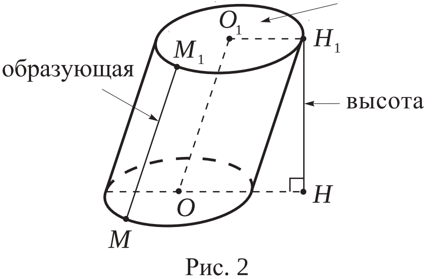


Рис. 2

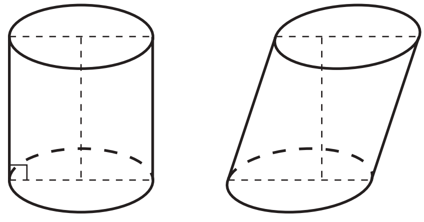
Отрезки, параллельные прямой OO_1, соединяющие соответствующие точки окружностей $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$, называются ***образующими цилиндра***.

Таким образом, отрезок MM_1 – образующая цилиндра, изображенного на рисунке 2.

Множество всех образующих цилиндра называется ***боковой поверхностью*** цилиндра, а множество точек цилиндра, которые не принадлежат ни основаниям, ни боковой поверхности, называется ***внутренней областью цилиндра***.

Если образующие цилиндра перпендикулярны плоскостям оснований, то цилиндр называется ***прямым*** (рис.3, а)), в противном случае, цилиндр называется ***наклонным*** (рис. 3 б)).

Заметим, что образующие прямого цилиндра являются его высотами.



а) б)

Рис. 3

Замечания*. 1.** В IX классе изучается только прямой круговой цилиндр, который для краткости называется ***цилиндром.

2. На практике чаще встречаются задачи, связанные с поверхностью цилиндра. Поэтому для краткости под понятием цилиндр иногда подразумевается только его поверхность.

2 Опишите тело, которое получится при полном вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB.

Решение:

При полном вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB получится цилиндр, высотой которого является отрезок AB, а радиусом – отрезок AD (рис. 4).

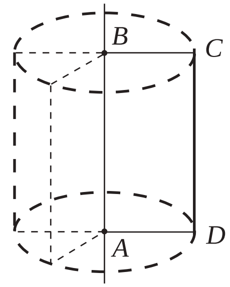


Рис. 4

1.2. Развертка цилиндра. Сечения

1 Рассмотрите развертку цилиндра.

Решение:

Разрезав боковую поверхность цилиндра по образующей, получим прямоугольную поверхность (рис.5). Размеры этого прямоугольника равны длине окружностей оснований и длине образующих цилиндра. Следовательно, развертка цилиндра состоит из двух кругов равных радиусов и прямоугольной поверхности, измерения которой равны длине одной из окружностей оснований и длине образующей цилиндра.

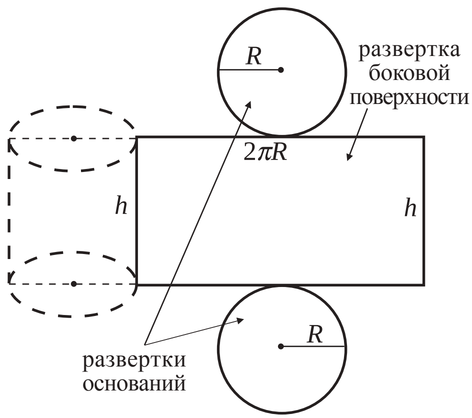


Рис. 5

Мастерская. Изготовьте из картона прямой круговой цилиндр, высота которого равна 15 см, а радиус основания – 5 см.

2 Какая фигура получится при пересечении цилиндра плоскостью, содержащей центры оснований цилиндра?

Решение:

Пусть O_1 и O_2 – центры оснований цилиндра. Сечением цилиндра плоскостью, проходящей по оси O_1O_2, является прямоугольник $ABCD$ с измерениями, равными высоте цилиндра и диаметру оснований (рис. 6).

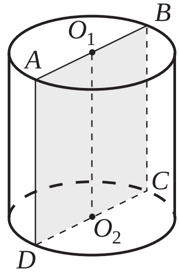


Рис. 6

Замечание. Прямоугольник $ABCD$ называется ***осевым сечением*** цилиндра, а прямая O_1O_2 – ***осью симметрии*** цилиндра.

ПРИМЕНИМ

• Прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен 10 см, а образующая – 16 см, пересечен плоскостью, параллельной его оси симметрии (рис.7). Найдите расстояние от плоскости сечения до оси, если площадь сечения равна 192 см^2.

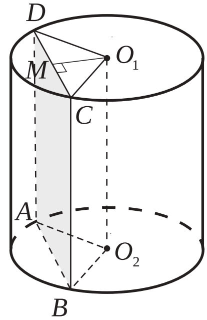


Рис. 7

Решение:

Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его оси симметрии, является прямоугольник $ABCD$, одно из измерений которого равно образующей цилиндра.

Значит, $\mathscr{S}_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow DC = \dfrac{\mathscr{S}_{ABCD}}{AD} = \dfrac{192}{16} = 12$ (см).

Пусть O_1M – высота равнобедренного треугольника DO_1C и $DO_1 = O_1C = 10$ см.

O_1M является расстоянием от оси O_1O_2 до плоскости сечения.

Таким образом, $O_1M = \sqrt{DO_1^2 - \left(\dfrac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Ответ: 8 см.

1.3. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем цилиндра

1 Пусть r – радиус основания цилиндра, h – длина образующей (высоты) цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение:

Так как развертка боковой поверхности цилиндра – это прямоугольник с измерениями $2\pi r$ (длина основания) и h, то получаем, что ее площадь равна $\boxed{\mathscr{S}_б = 2\pi rh}$.

Площадь боковой поверхности цилиндра обозначают: $\mathscr{A}_б$.
Площадь полной поверхности ($\mathscr{A}_п$) цилиндра равна сумме площадей боковой поверхности и двух его оснований.

Так как площадь основания равна $\mathscr{A}_{осн} = \pi r^2$, то следует, что площадь полной поверхности цилиндра равна

$$\mathscr{A}_п = \mathscr{A}_б + 2\mathscr{A}_{осн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \boxed{2\pi r(h+r)}.$$

2 Вычислите объем:

а) правильной четырехугольной призмы, высота которой h, а сторона основания a;

б) цилиндра, высота которого h, а радиус оснований r.

Решение:

а) Объем призмы равен $\mathscr{A}_{осн} \cdot h$, где $\mathscr{A}_{осн}$ – площадь основания, h – высота призмы. Следовательно, $\mathscr{V} = a^2 \cdot h$.

б) Если считать, что основания правильной призмы являются правильными многоугольниками с очень большим числом сторон, то получим тело, подобное цилиндру (рис. 8).

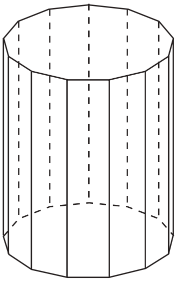


Рис. 8

Следовательно, как и в случае с призмой, можно считать объем цилиндра равным $\mathscr{A}_{осн} \cdot h$. Значит, $\boxed{\mathscr{V} = \mathscr{A}_{осн} \cdot h = \pi r^2 h}$.

Имеет место следующая

Теорема 1

Для любого прямого кругового цилиндра,
$$\mathscr{A}_б = 2\pi rh,$$
$$\mathscr{A}_п = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r),$$
$$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{осн} \cdot h = \pi r^2 h,$$
где r, h, $\mathscr{A}_б$, $\mathscr{A}_{осн}$, $\mathscr{A}_п$, $\mathscr{V}$ являются соответственно радиусом основания, высотой, площадью боковой поверхности, площадью основания, площадью полной поверхности и объемом цилиндра.

• *Решение задачи* **1** (см. начало параграфа):

Пусть S – поверхность одной цистерны, $S_п$ – поверхность всех цистерн.

Тогда $S = 2\pi r(h+r)$, где $h = 14$ м, $r = 1$ м.

$S \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ (м^2).

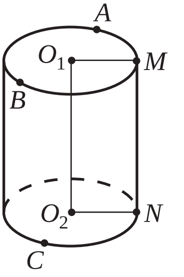
$S_п = 94{,}2 \cdot 10 = 942$ (м^2).

Так как $942 : 15 = 62{,}8$ и $62 < 62{,}8 < 63$, то следует, что необходимо 63 коробки краски.

Ответ: 63 коробки.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания



1. Постройте:
а) прямой круговой цилиндр; б) наклонный круговой цилиндр.
Перечислите его элементы.

2. На рисунке изображен прямой круговой цилиндр с основаниями $\mathscr{C}(O_1, R)$, $\mathscr{C}(O_2, R)$. Укажите из отрезков AO_1, BO_1, AB, $MN(MN \parallel O_1O_2)$, O_1O_2, CO_2, CN, O_2N:
а) образующие; б) высоты;
в) радиусы оснований; г) хорды оснований.

3. Дана прямоугольная поверхность с измерениями l и L. Является ли она разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра с основанием $\mathscr{C}(O_1, R)$ и образующей G, если:
а) $L = 0{,}8\pi,\ l = \frac{2}{5},\ R = 0{,}4,\ G = 0{,}4$; б) $L = \sqrt{12},\ l = \frac{1}{3},\ R = \frac{\sqrt{3}}{\pi},\ G = 0{,}3$;
в) $L = 6\pi^2,\ l = \frac{1}{\sqrt{2}},\ R = 3\pi,\ G = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

4. Дан прямой круговой цилиндр с основаниями $\mathscr{C}(O_1, R)$, $\mathscr{C}(O_2, R)$ и образующей G, $h = O_1O_2$, $\mathscr{A}_{осн}$, $\mathscr{A}_б$, $\mathscr{A}_п$, $\mathscr{V}$ – соответственно площадь основания, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем цилиндра. Заполните таблицу:

R	G	h	$\mathscr{A}_b$	$\mathscr{A}_l$	$\mathscr{A}_t$	$\mathscr{V}$
			16π	24π		
2,5		0,4				
		5				125π
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$					
		1			$1{,}5\pi$	

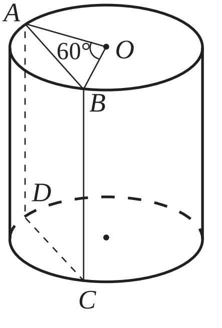
5. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна S. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра, если: а) $S = 100$ см^2; б) $S = 4$ см^2; в) $S = 0{,}64$ см^2.

6. Прямоугольник, длины сторон которого равны 5 см и 8 см, вращается вокруг своей большей стороны. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного тела вращения.

7. Отношение длин сторон прямоугольника равно 0,75, а его площадь – 48 см^2. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг его оси симметрии. Сколько решений имеет задача?

Формируем способности и применяем

8. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = a$ и $m(\angle CAB) = \alpha$. Он является разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Вычислите площадь полной поверхности и объем цилиндра (рассмотрите оба случая), зная, что:
а) $a = 24$ см и $\alpha = 30°$;
б) $a = 10$ см и $\alpha = 45°$;
в) $a = 16$ см и $\alpha = 60°$.



9. На рисунке изображен прямой круговой цилиндр. $[AD]$ и $[BC]$ – две образующие цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, зная, что O – центр основания и $\mathscr{A}_{ABCD} = 20$ см^2.

10. Высота прямого кругового цилиндра равна H, а радиус – R. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси на расстоянии d от оси цилиндра, если:
а) $R=5$ см; $H=10$ см; $d=4$ см; б) $R=\sqrt{17}$ см; $H=4$ см; $d=4$ см;
в) $R=x$; $H=2x$; $d=0{,}5x$.

11. Найдите объем камня, если при погружении его в цилиндрический сосуд радиуса R уровень воды повышается на h:
а) $R=8$ см; $h=3$ см; б) $R=3\sqrt{2}$ см; $h=2\sqrt{2}$ см.

12. Найдите массу трубы, если ее длина – l, толщина – h, внутренний диаметр – H, плотность материала – ρ: а) $l=3$ м; $h=5$ см; $H=10$ см; $\rho=10$ г/ см^3;
б) $l=4\sqrt{2}$ м; $h=\sqrt{2}$ см; $H=9\sqrt{2}$ см; $\rho=\dfrac{12}{\sqrt{2}}$ г/ см^3.

13. Высота прямого кругового цилиндра равна 8 см, а его объем – 72π см^3. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

14. Один сосуд – узкий и высокий, другой – в два раза шире и в два раза ниже, чем первый. Какой из них имеет бóльшую емкость?

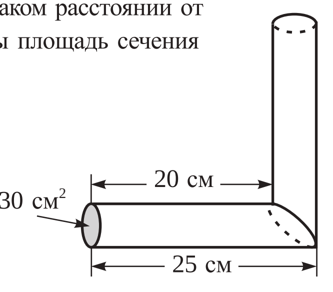
15. Радиус основания цилиндра равен 5 см, площадь боковой поверхности в 3 раза больше площади одного основания. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.

16. Отношение высоты цилиндра к радиусу основания равно 1,6. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра, если известно, что площадь его боковой поверхности равна 80π см^2.

17. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус основания – 5 см. На каком расстоянии от оси цилиндра надо провести плоскость, параллельно ей, чтобы площадь сечения была равна 48 см^2? Составьте и решите подобную задачу.

18. Сколько весит железный прут диаметром 10 см и длиной 0,5 м, если известно, что плотность железа равна 7850 кг/м^3?

19. Тело, изображенное на рисунке, состоит из двух одинаковых труб. Найдите объем тела.



Развиваем способности и творим

20. Из цилиндрического стержня изготовили максимальное количество гаек квадратной формы со стороной 12 см с минимальным расходом материала. В каждой гайке проделали отверстие диаметром 6 см. Найдите диаметр стержня. Сколько процентов от объема стержня составляют отходы при переработке?

21. Из цилиндрического стержня диаметром 14 см производят гайки в форме правильного шестиугольника, толщиной – 4 см. Какое максимальное количество гаек можно изготовить из такого стержня, если известно, что его длина 89 см? Сколько процентов от объема стержня составят отходы, если диаметр отверстия каждой гайки равен 8 мм?

22. Во сколько раз надо увеличить высоту прямого кругового цилиндра, не меняя его основания, чтобы его объем увеличился в 8 раз?
Составьте и решите подобную задачу.

23. Во сколько раз надо увеличить радиус основания прямого кругового цилиндра, не меняя высоты, чтобы его объем увеличился в 8 раз?

§ 2. Конус (прямой круговой)

ИССЛЕДУЕМ

1 Собранное зерно засыпали в бункер элеватора в форме конуса, высота которого равна 2,4 м и площадь основания – 26 м². Сколько тонн зерна поместилось в хранилище, если одна тонна зерна занимает 1,3 м³?

2.1. Элементы конуса

Определения

Дан круг $\mathscr{D}$ и V – точка, не принадлежащая плоскости круга.

- Геометрическое тело, образованное всеми отрезками, соединяющими точку V с точками, принадлежащими кругу $\mathscr{D}$, называется **круговым конусом** (рис. 9).
- Круг $\mathscr{D}$ называется **основанием** конуса, а точка V – **вершина** конуса.
- Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими** конуса.

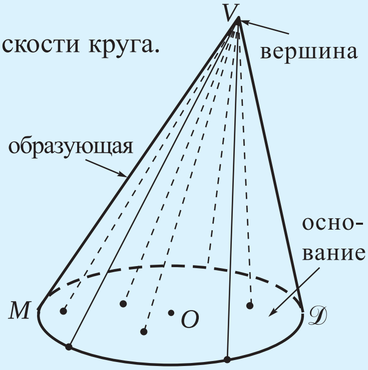


Рис. 9

Например, на рисунке 9 изображен конус с вершиной V и основанием $\mathscr{D}$.

Отрезок VM – образующая этого конуса.

Пусть O – центр основания кругового конуса (рис. 10).

Если прямая VO перпендикулярна основанию конуса, то конус называется ***прямым*** (рис.10, а)), в противном случае, конус называется ***наклонным*** (рис. 10 б)).

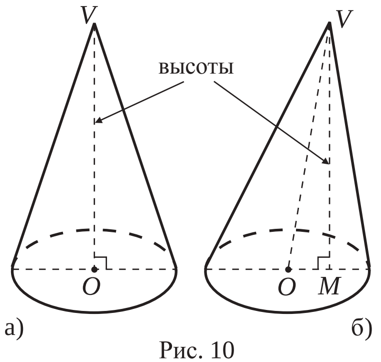


Рис. 10

Множество всех образующих конуса называется ***боковой поверхностью конуса***. Множество точек конуса, которые не принадлежат ни боковой поверхности, ни основанию конуса, называется ***внутренней областью конуса***.

Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется ***высотой*** конуса (рис. 10).

Длина этого отрезка также называется ***высотой***.

***Замечания*. 1.** Высота прямого кругового конуса совпадает с отрезком, соединяющим вершину конуса с центром его основания.

2. Часто, для краткости изложения, конусом называют только его поверхность.

3. В IX классе изучается только прямой круговой конус, который для краткости называется ***конусом***.

2 Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $m(\angle ABC) = 90°$. Опишите тело, которое получится при полном вращении треугольника ABC вокруг прямой AB.

Решение:

При полном вращении треугольника ABC вокруг прямой AB получится прямой круговой конус, образующей которого является AC, а радиусом основания – BC (рис. 11).

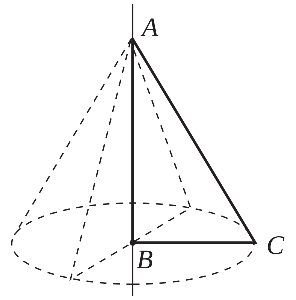


Рис. 11

2.2. Развертка конуса. Сечения

1 Рассмотрите и опишите развертку конуса.

Решение:

Разрезав боковую поверхность конуса по образующей, получим поверхность в форме кругового сектора (рис.12). Заметим, что радиус круга равен длине образующей конуса, а его длина – периметру основания конуса.

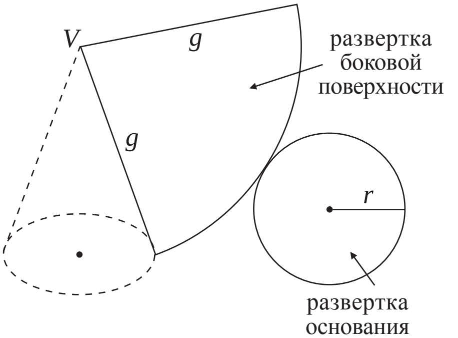
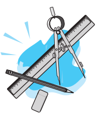


Рис. 12



Мастерская. Изготовьте из картона конус, образующая сектора которого равна 10 см, а радиус основания – 5 см.

• Пересекая конус плоскостью, содержащей его вершину и центр основания, получим сечение, ограниченное равнобедренным треугольником. Это сечение называется ***осевым сечением конуса***. На рисунке 13 поверхность, ограниченная треугольником ABC, – осевое сечение конуса.

Замечание. Прямая VO, где V – вершина, а O – центр основания конуса, называется ***осью симметрии*** конуса.

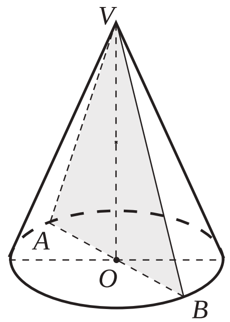


Рис. 13

2.3. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем конуса

1 Пусть g – образующая конуса, r – радиус основания.

• ***Площадь боковой поверхности*** конуса обозначают: $\mathcal{A}_б$.

• $\mathcal{A}_б = \pi g r$.

• ***Площадь полной поверхности*** $(\mathcal{A}_п)$ конуса равна сумме площадей боковой поверхности и его основания.

ПРИМЕНИМ

• Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении квадрата со стороной a вокруг своей диагонали.

Решение:

При вращении квадрата вокруг диагонали получаем тело, образованное двумя конгруэнтными конусами, радиус основания (r) которых равен половине длины диагонали квадрата, а образующая (g) конгруэнтна стороне квадрата (рис. 14).

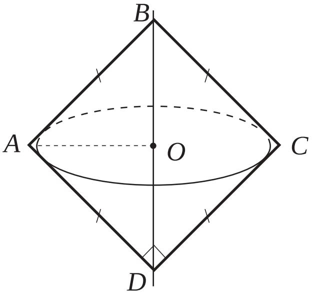


Рис. 14

Приняв во внимание ответ задачи 1, получим:

$$\mathscr{A} = 2 \cdot \pi\, gr = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2\pi\sqrt{2}.$$

Ответ: $a^2\pi\sqrt{2}$ квадратных единиц.

2 Найдите объем конуса, высота которого h, а радиус основания r.

Решение:

Рассмотрев правильную пирамиду, в основании которой лежит многоугольник с большим числом сторон, получим тело, подобное конусу (рис. 15). Следовательно, как и в случае с пирамидой, объем конуса можно вычислить по формуле $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{осн} \cdot h$.

Но $\mathscr{A}_{осн} = \pi r^2$. Значит, $\boxed{\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

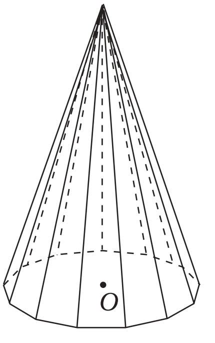


Рис. 15

Теорема 2

Для любого прямого кругового конуса,

$$\mathscr{A}_б = \pi g r,$$
$$\mathscr{A}_п = \mathscr{A}_б + \mathscr{A}_{осн} = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r),$$
$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{осн} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

где r, g, h, $\mathscr{A}_б$, $\mathscr{A}_{осн}$, $\mathscr{A}_п$, $\mathscr{V}$ являются соответственно радиусом основания, образующей, высотой, площадью боковой поверхности, площадью основания, площадью полной поверхности и объемом конуса.

• *Решение задачи* 1 (см. начало параграфа):

Пусть V – объем собранного зерна.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, где r – радиус основания зернохранилища, а $h = 2{,}4$ м.

По условию задачи, $2\pi r^2 = 26$ (м).

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 2{,}4 = 20{,}8$ (м^3).

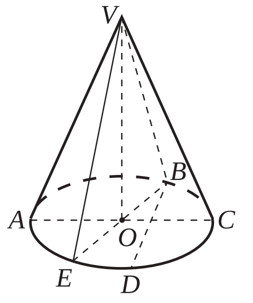
Значит, зерно весит $20{,}8 : 1{,}3 = 16$ (т).

Ответ: 16 тонн зерна.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Постройте:
а) прямой круговой конус;
б) наклонный круговой конус.



2. На рисунке изображен прямой круговой конус с центром основания O. Укажите:
а) образующие; б) высоты;
в) радиусы оснований; г) хорды оснований.

3. Нарисуйте развертку прямого кругового конуса с образующей g и радиусом основания R, если:
а) $g = 5$ см, $R = 2$ см; б) $g = 7$ см, $R = 3$ см.

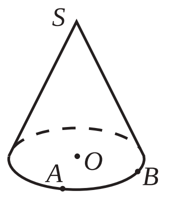
4. Дан прямой круговой конус с основанием $\mathscr{C}(O, R)$, $\mathscr{A}_{осн}$, $\mathscr{A}_{б}$, $\mathscr{A}_{п}$, $\mathscr{V}$ – соответственно площадь основания, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем конуса, g – образующая и h – высота конуса. Заполните таблицу:

R	g	h	$\mathscr{A}_{осн}$	$\mathscr{A}_{б}$	$\mathscr{A}_{п}$	$\mathscr{V}$
4		3				
5	13					
		4				108π
8				80π		
	7					30π

5. Равнобедренный треугольник со сторонами 5 см, 5 см, 6 см вращают вокруг его оси симметрии. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного геометрического тела.

6. Равнобедренный треугольник со сторонами 13 см, 13 см, 10 см вращают вокруг его основания. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного геометрического тела.

Формируем способности и применяем



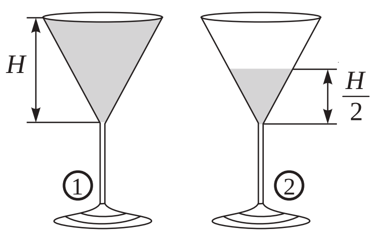
7. Площадь полной поверхности прямого кругового конуса равна 253 см^2, а площадь боковой поверхности – 11 см^2. Найдите длину образующей конуса.

8. Вычислите площадь плоскости сечения конуса, проходящего через точки S, A, B, если $SO = 10$ см, $OA = 3$ см, $AB = 4$ см.

9. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 4,5 см и 6 см, вращается вокруг высоты, проведенной из вершины прямого угла. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного тела вращения.

10. Площадь осевого сечения конуса равна S. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса, если радиус основания конуса – R.

11. На рисунке изображены идентичные фужеры конической формы. В первом (левом) фужере 200 мл сока. Сколько сока во втором фужере?



Развиваем способности и творим

12. Площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, равна S. Сечение проходит на расстоянии d от вершины конуса. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса, если высота конуса равна h.

13. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, вращают вокруг гипотенузы. Найдите объем полученного тела.

14. Площадь основания прямого кругового конуса равна 9π см^2. Найдите площадь полной поверхности конуса, если его объем равен 12π см^3.

15. Образующая прямого кругового конуса равна 10 см, угол при вершине осевого сечения равен $120°$. Найдите объем конуса.

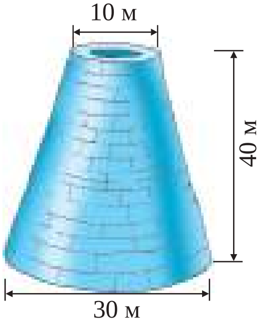
16. Равносторонний треугольник, сторона которого равна 8 см, вращается вокруг прямой, содержащей вершину треугольника и параллельной стороне, не содержащей эту вершину. Найдите объем полученного тела вращения.

17. Ромб со стороной 8 см и острым углом, равным 60°, вращают вокруг одной из сторон. Найдите объем полученного тела.

18. Равнобокую трапецию, основания которой равны 10 см, 12 см, а боковая сторона – 10 см, вращают вокруг большего основания. Найдите объем полученного тела.

§ 3. Усеченный конус (прямой круговой)

1 Труба теплоцентрали имеет форму усеченного конуса (см. рисунок). Внешний диаметр большего основания равен 30 м, а меньшего – 10 м. Высота трубы 40 м. Сколько цемента необходимо для того, чтобы заштукатурить боковую поверхность трубы, если на 10 м^2 поверхности расходуется 50 кг цемента?



3.1. Элементы усеченного конуса

ИССЛЕДУЕМ

Сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию, является кругом. Часть конуса, ограниченная этим кругом и основанием конуса, называется ***усеченным конусом*** (рис.16). Круги усеченного конуса называются ***основаниями***. Отрезки усеченного конуса, лежащие на образующих конуса, называются ***образующими*** усеченного конуса. Множество образующих усеченного конуса составляет ***боковую поверхность*** усеченного конуса. Отрезок усеченного конуса, лежащий на высоте конуса, называется ***высотой*** усеченного конуса.

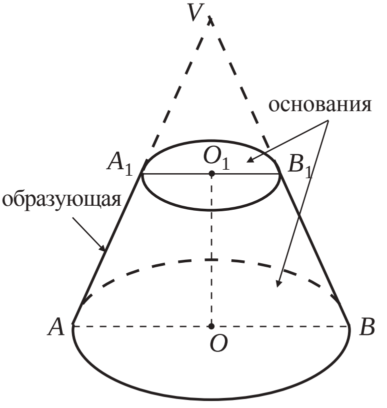


Рис. 16

Пусть O, O_1 – центры оснований усеченного конуса. Отрезок OO_1 является ***высотой*** усеченного конуса. Длина отрезка OO_1 также называется ***высотой***.

2 Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, у которой $m(\angle A) = 90°$. Опишите тело, которое получится при вращении трапеция $ABCD$ вокруг прямой AB.

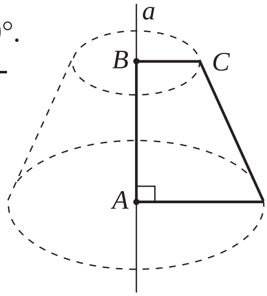


Рис. 17

Решение:

При вращении трапеции $ABCD$ (рис. 17) вокруг прямой AB получится прямой круговой усеченный конус. Меньшее (большее) основание трапеции равно радиусу меньшего (большего) основания усеченного конуса, AB – высота усеченного конуса.

3.2. Развертка усеченного конуса. Сечения

1 Рассмотрите и опишите развертку усеченного конуса (рис. 18).

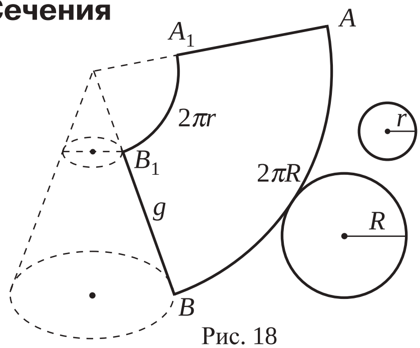
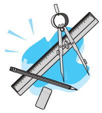


Рис. 18

Решение:

Разрезав боковую поверхность усеченного конуса по образующей, получим сектор кругового кольца.

Заметим, что длины дуг кольца равны длинам оснований усеченного конуса.



Мастерская. Изготовьте из картона усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 см и 4 см, а длина образующей – 10 см.

При пересечении усеченного конуса плоскостью, содержащей центры его оснований, получим сечение, которое называется ***осевым сечением*** усеченного конуса.

Осевое сечение усеченного конуса является поверхностью, ограниченной равнобокой трапецией (рис. 19).

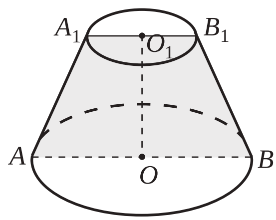


Рис. 19

> ***Замечание.*** Прямая OO_1, где O и O_1 – центры оснований усеченного конуса, называется ***осью симметрии*** усеченного конуса.

• Какая фигура получится при пересечении усеченного конуса плоскостью, не содержащей его центры оснований, но параллельной прямой, проходящей через эти центры?

2 (дополнительный материал). Найдите площадь боковой поверхности конуса, радиусы которого равны R и r, а образующая – g (рис. 20).

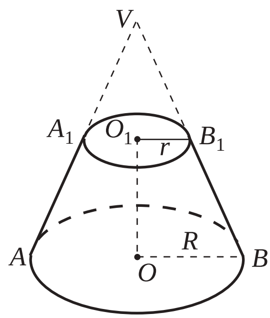


Рис. 20

Решение:

Пусть $\mathcal{A}_б$ – площадь боковой поверхности усеченного конуса, $\mathcal{A}$ – площадь боковой поверхности конуса, из которого был получен усеченный конус, $\mathcal{A}_1$ – площадь боковой поверхности меньшего конуса.

Обозначим через l образующую меньшего конуса, тогда $g+l$ является образующей большего конуса.

Получим $\mathscr{A}_б = \mathscr{A} - \mathscr{A}_1 = \pi R(l+g) - \pi rl = \pi Rg + \pi l(R-r)$ (∗).

Заметим, что $\frac{R}{r} = \frac{g+l}{l}$, откуда $l = \frac{rg}{R-r}$.

Подставляя в формулу (∗), получим:

$$\mathscr{A}_б = \pi Rg + \pi \cdot \frac{rg}{R-r} \cdot (R-r) = \pi g(R+r).$$

Ответ: $\pi g(R+r)$.

ПРИМЕНИМ

• Пусть $ABCD$ – трапеция, с бо́льшим основанием AB, $DC=10$ см, $m(\angle A) = m(\angle B) = 45°$ и высотой, равной 6 см (рис. 21). Вычислите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении этой трапеции вокруг своей оси симметрии.

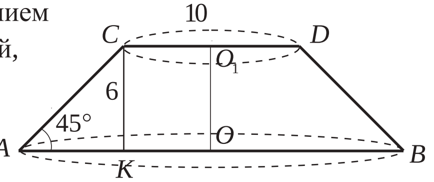


Рис. 21

Решение:

Пусть O и O_1 – середины оснований AB и CD.

OO_1 – ось симметрии трапеции.

При вращении трапеции $ABCD$ вокруг прямой OO_1 получится усеченный конус, радиусами оснований которого являются AO и CO_1, а OO_1 – высота. Пусть CK – высота трапеции.

Треугольник AKC – равнобедренный и прямоугольный. Значит, $AK = CK$. Так как $KO = CO_1$, то получим $AO = AK + KO = 6 + 5 = 11$ (см). $AC = \frac{AK}{\cos 45°} = 6\sqrt{2}$ (см).

Таким образом, используя ответ задачи 2, узнаем, что площадь полной поверхности усеченного конуса равна:

$$\mathscr{A}_п = \mathscr{A}_б + \pi \cdot AO^2 + \pi \cdot CO_1^2 = \pi \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 + \pi \cdot 121 + \pi \cdot 25 = (96\sqrt{2} + 146)\pi \ (\text{см}^2).$$

Ответ: $(96\sqrt{2}+146)\pi$ см^2.

• *Решение задачи* 1 (см. начало параграфа):

Пусть S – поверхность, которую надо заштукатурить. Тогда, приняв во внимание ответ задачи 2, $S = \pi g(R+r)$, где R, r, g – соответственно радиусы оснований и образующая усеченного конуса, соответствующего трубе (рис. 22) и $R = 15$ м, $r = 5$ м.

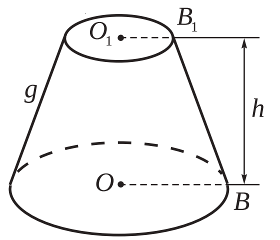


Рис. 22

Заметим (рис. 23), что $g = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

Значит, $g = \sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$ (м).

Тогда $S \approx 3{,}14 \cdot 10\sqrt{17} \cdot 20 \approx 2\,589{,}3$ (м^2).

Следовательно, приблизительно понадобится $(2\,589{,}3 : 10) \cdot 50 = 12\,946{,}5$ кг цемента.

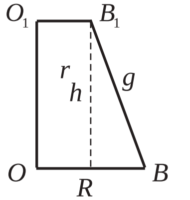
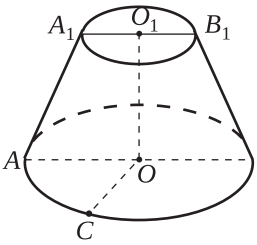


Рис. 23

Ответ: 12 946,5 кг цемента.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания



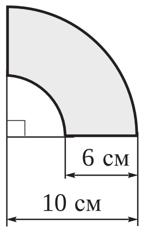
1. Постройте усеченный конус:
а) прямой круговой; б) наклонный круговой.

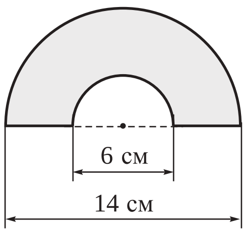
2. На рисунке изображен прямой круговой усеченный конус. Укажите:
а) образующие;
б) высоты;
в) радиусы оснований.

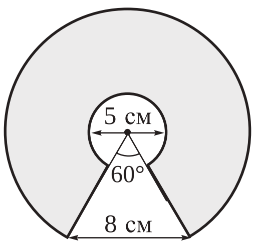
3. Равнобокая трапеция с основаниями, равными 10 см и 5 см, вращается вокруг ее оси симметрии. Опишите тело, которое получится при вращении, если высота трапеции равна 8 см.

4. Нарисуйте развертку прямого кругового усеченного конуса с образующей g и радиусами оснований R, r, если:
а) $g = 6$ см, $R = 3$ см, $r = 1$ см; б) $g = 8$ см, $R = 4$ см, $r = 2$ см.

5. Используя данные рисунка, найдите радиусы оснований, длину образующей и высоту прямого кругового усеченного конуса, развертка боковой поверхности которого совпадает с заданным сектором кольца:

а)


б)


в)


Формируем способности и применяем

6. Найдите радиусы оснований и высоту усеченного конуса, зная, что его осевое сечение ограничено четырехугольником со сторонами 12 см, 125 см, 125 см, 100 см.

7. Найдите длину образующей усеченного конуса, зная, что диаметры оснований равны 12 см и 28 см, а его осевое сечение – треугольник, площадь которого 120 см^2.

8. Радиус окружности, описанной около осевого сечения усеченного конуса, равен 42,5 см. Найдите длину образующей усеченного конуса, если площади оснований равны $1764\pi\text{ см}^2$ и $324\pi\text{ см}^2$.

9. Высота усеченного конуса равна 4 см, а длина образующей – $4\sqrt{2}$ см. Найдите высоту конуса, из которого был получен усеченный конус, если среднее арифметическое радиусов оснований равно 10 см.

10. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна 81 см^2. Найдите радиус большего основания усеченного конуса, если радиус меньшего основания равен 2,5 см, а длина образующей – 9 см.

11. Радиусы оснований усеченного конуса равны 8,7 см и 5,3 см. Найдите длину образующей усеченного конуса, если площадь его осевого сечения равна 119 см^2.

Развиваем способности и творим

12. Центр окружности, описанной около осевого сечения усеченного конуса, совпадает с центром большего основания усеченного конуса. Найдите радиус большего основания усеченного конуса, если радиус меньшего основания равен 5 см, а площадь его осевого сечения равна $216\ см^2$.

13*. Радиусы оснований и высота прямого кругового усеченного конуса прямо пропорциональны числам 3, 6 и 4. Вычислите объем усеченного конуса, если длина образующей равна 25 см.

14. Осевое сечение усеченного конуса – равнобокая трапеция, диагонали которой взаимно перпендикулярны. Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если известно, что один из радиусов в два раз больше другого, а объем конуса, из которого был получен усеченный конус, равен $64\pi\ см^3$.

§ 4. Сфера

1 Шесть мальчиков разделили поровну и съели арбуз, радиус которого 20 см, а четыре девочки разделили поровну и съели арбуз, радиус которого 15 см. Кому досталось больше арбуза: одной девочке или одному мальчику?

4.1. Элементы сферы

ИССЛЕДУЕМ

2 Дана фиксированная точка O и R – действительное положительное число.

а) Что собой представляет геометрическое место точек на плоскости, расположенных на расстоянии R от точки O?

б) Какую геометрическую фигуру получим при вращении в плоскости отрезка длиной R вокруг одного из его концов (фиксированного)?

в) Как называется геометрическое место точек пространства, расположенных на расстоянии R от точки O.

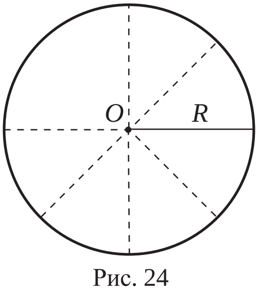


Рис. 24

Решение:

а) Геометрическим местом точек на плоскости, расположенных на расстоянии R от точки O, является окружность $\mathscr{C}(O,R)$ (рис. 24).

б) При полном вращении отрезка длиной R вокруг одного из его концов, получим круг радиуса R (рис. 25).

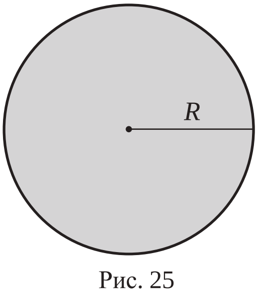


Рис. 25

в) Множество точек пространства, расположенных на расстоянии R от точки O, называется ***сферой с центром O и радиусом R***.

Обозначаем: $\mathscr{S}(O, R)$. То есть, $\mathscr{S}(O,R)=\{M \mid OM=R\}$.

Любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой на ней, называется ***радиусом*** (рис.26). Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр сферы, называется ***диаметром***.

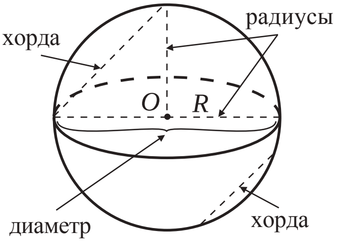


Рис. 26

3 Как называется геометрическое место точек пространства:

а) расположенных на расстоянии, меньшем, чем R от точки O;

б) расположенных на расстоянии, большем, чем R от точки O?

Решение:

а) Множество точек пространства, расположенных на расстоянии, меньшем, чем R от точки O, называется ***внутренней областью*** сферы $\mathscr{S}(O, R)$.

Обозначаем: Int $\mathscr{S}(O, R)$. То есть, $\operatorname{Int} \mathscr{S}(O,R)=\{M \mid OM<R\}$.

б) Множество точек пространства, расположенных на расстоянии, большем, чем R от точки O, то есть множество точек пространства, которые не принадлежат сфере $\mathscr{S}(O, R)$ и ее внутренней области, называется ***внешней областью*** сферы $\mathscr{S}(O, R)$.

Обозначаем: Ext $\mathscr{S}(O, R)$. То есть, $\operatorname{Ext} \mathscr{S}(O,R)=\{M \mid OM>R\}$.

Сфера вместе с внутренней ее областью называется ***шаром*** или ***сферическим телом***. Следовательно, поверхностью шара является сфера.

Пересечением секущей плоскости и сферы является окружность (рис. 27).

Если центр этой окружности совпадает с центром сферы, то окружность называется ***большой окружностью сферы*** (рис. 28).

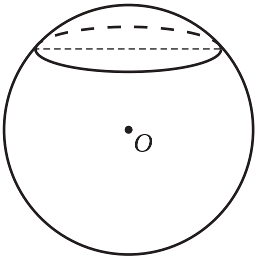


Рис. 27

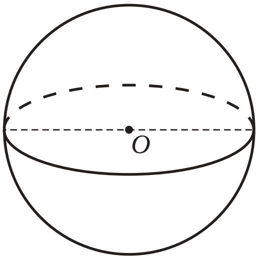


Рис. 28

4.2. Площадь сферы. Объем шара

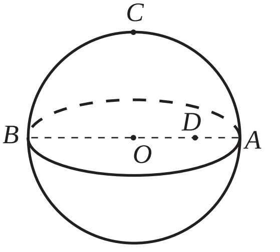
В XII классе докажем, что:

- площадь сферы вычисляется по формуле $\mathscr{A}=4\pi R^2$, где R – радиус сферы;
- объем шара определяется по формуле $\mathscr{V}=\dfrac{4\pi R^3}{3}$, где R – радиус этого шара.

Упражнения и задачи

Фиксируем знания

1. Постройте и обозначьте сферу.



2. На рисунке точки A, B, C принадлежат $\mathcal{S}(O, R)$. Среди отрезков OA, OC, OB, AB, BC, CA, DA, DC, BD укажите:
а) радиусы;
б) хорды;
в) диаметр.

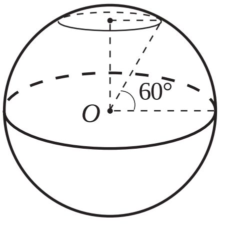
3. Пусть h – расстояние от прямой d до центра сферы $\mathcal{S}(O, R)$. Определите взаимное расположение прямой d и сферы, если:
а) $h = 8$ см, $R = 9$ см; б) $h = 11$ см, $R = 7$ см; в) $h = 10$ см, $R = 10$ см.

4. Пусть d – расстояние от плоскости α до центра сферы $\mathcal{S}(O, R)$. Определите взаимное расположение плоскости α и сферы, если:
а) $d = 5$ см, $R = 2\sqrt{3}$ см; б) $d = \frac{7}{9}$ см, $R = \frac{5}{8}$ см; в) $d = 5,(6)$ см, $R = 5\frac{2}{3}$ см.

5. Пусть d – расстояние от центра сферы $\mathcal{S}(O, R)$ до хорды AB. Найдите длину хорды, если:
а) $d = 3$ см, $R = 5$ см; б) $d = 5$ см, $R = 13$ см; в) $d = 2\sqrt{5}$ см, $R = 2\sqrt{6}$ см.

Формируем способности и применяем

6. Радиус земного шара равен (приблизительно) 6400 км. Чему равна длина параллели, широта которой 60° (см. рисунок)?



7. Площадь большой окружности сферы равна S. Вычислите площадь сферы и объем шара, ограниченного этой сферой, если:
а) $S = 36\pi$ м^2; б) $S = 1\frac{32}{49}\pi$ м^2; в) $S = 27\pi$ м^2.

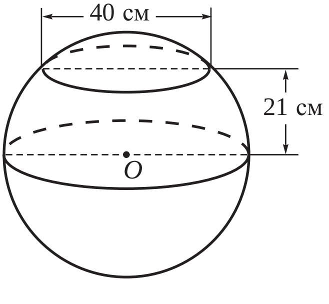
8. Дано: $\mathcal{S}(O, R)$ и d – расстояние от плоскости α до центра O. Вычислите площадь круга, полученного при пересечении шара плоскостью α, если:
а) $R = 15$ см, $d = 12$ см; б) $R = 8\sqrt{3}$ см, $d = 2\sqrt{3}$ см; в) $R = d = 10$ см.

9. Решите задачу, предложенную в начале параграфа.

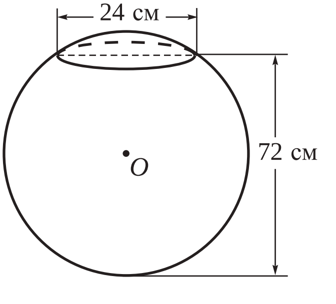
Развиваем способности и творим

10. Используя данные рисунка, найдите площадь сферы (точка O – центр сферы):

а)



б)



11. Площадь сферы равна 387 см^2. Найдите площадь сферы, зная, что объем шара, который она ограничивает, в 27 раз меньше объема шара, который ограничивает заданная сфера.

12. Площадь сферы равна 20 см^2. На каком расстоянии от центра сферы надо провести плоскость сечения, таким образом, чтобы площадь круга сечения была равна $2{,}75 \text{ см}^2$?

Упражнения и задачи для повторения

Фиксируем знания

1. Постройте:

а) прямой круговой конус; б) прямой круговой цилиндр;

в) прямой круговой усеченный конус; г) сферу.

2. Начертите развертку:

а) прямого кругового цилиндра, радиус основания которого равен 2 см, а образующая – 6 см;

б) прямого кругового конуса, радиус основания которого равен 3 см, а образующая – 8 см;

в) прямого кругового усеченного конуса, радиусы основания которого равны 2 см и 3 см, а образующая – 5 см.

3. Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра – прямоугольник с измерениями $2\sqrt{5}$ см и $10\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра, зная, что его образующая меньше диаметра его основания.

4. Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса – круговой сектор 60° и радиуса 9 см. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса.

5. Найдите радиус круга, площадь которого равна площади полной поверхности прямого кругового цилиндра с радиусом основания – 2 см и высотой – 7 см.

6. Вычислите объем тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг его большей стороны, зная, что диагональ прямоугольника равна 5 см, а периметр – 14 см.

7. Вычислите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника, катеты которого равны $3\frac{1}{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см:

а) вокруг большего катета; б) вокруг гипотенузы.

Формируем способности и применяем

8. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат с диагональю $\sqrt{72}$ см. Найдите объем цилиндра.

9. Высота конуса конгруэнтна диаметру его основания. Найдите отношение площади основания к площади боковой поверхности конуса.

10. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра, полученного при полном вращении прямоугольника, со сторонами 5 см и 7 см, вокруг одной из его сторон. Рассмотрите оба случая.

11. Шарик, радиуса 6 см и куб со стороной 9 см, выполнены из одного и того же материала. Сравните массы этих тел.

12. Равносторонний треугольник вращают вокруг его оси симметрии. Найдите объем полученного тела, если площадь треугольника равна $16\sqrt{3}$ см^2.

13. Найдите радиус основания прямого кругового цилиндра, если площадь его полной поверхности равна 13π см^2, а образующая $1\frac{1}{4}$ см.

14. Найдите радиус основания прямого кругового конуса, если площадь его полной поверхности равна 98π см^2, а образующая 7 см.

15. Шарик радиуса 10 см поместили в сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого равен 12 см. В сосуд налили 1 л воды. Будет ли шар покрыт водой?

16. Дан ромб, диагонали которого равны 6 см и $6\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при полном вращении ромба вокруг одной из его сторон.

17. Какое тело имеет больший объем: шар радиуса 10 см или правильный тетраэдр, ребро которого равно 15 см?

Развиваем способности и творим

18. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса, если угол между образующей и плоскостью основания конуса равен 60°.

19. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно $6\frac{1}{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса, если угол между образующей и высотой конуса равен 60°.

20. Площадь боковой поверхности конуса в 4 раза больше площади его основания. Найдите величину центрального угла кругового сектора, который является разверткой боковой поверхности конуса.

21. Сфера вписана в конус. Значение отношения площади основания конуса к площади сферы равно 0,75. Найдите величину угла между образующей и плоскостью основания конуса.

22. Равносторонний треугольник вращают вокруг одной из его сторон. Найдите объем полученного тела, если сторона треугольника равна a.

23*. Найдите радиус большего основания прямого кругового усеченного конуса, если площадь его полной поверхности равна 506π см^2, площадь боковой поверхности – 273π см^2, а радиус меньшего основания – 8 см.

24*. Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AB, у которой $m(\angle A) = 90°$, AD = 8 см, AB = 8 см, DC = 2 см. Найдите объем тела, полученного при вращении трапеции вокруг:
а) стороны AB; б) меньшего основания.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

I вариант

1. Дан прямой круговой цилиндр с образующей 5,5 см и радиусом основания 2 см.
   а) Нарисуйте развертку данного цилиндра. **3 б**
   б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. **3 б**
   в) Найдите площадь полной поверхности цилиндра. **3 б**
   г) Найдите объем цилиндра. **3 б**
2. Металлический прямой круговой конус имеет образующую, длиной 5 см, а диаметр его основания равен 4 см.
   а) Найдите высоту конуса. **3 б**
   б) Найдите площадь боковой поверхности конуса. **3 б**
   в) Найдите объем конуса. **3 б**
   г) Данный конус переплавили в шарики одинакового размера, радиус каждого из которых равен 1см. Сколько таких шариков получили? **5 б**
3. Площадь поверхности мяча составляет 400π см^2.
   а) Можно ли поместить этот мяч в коробку, имеющую форму куба с ребром 15 см? Объясните ответ. **5 б**
   б) Мяч находился на расстоянии 2 м от стены. Ребенок толкнул мяч в направлении стены и он покатился по прямой, сделав ровно 3 оборота, и остановился. На каком расстоянии от стены остановился мяч? (При расчётах примите $\pi \approx 3{,}14$.) **6 б**
4. Деталь имеет форму фигуры, полученной при вращении прямоугольного треугольника (длина катетов равна 8 см и 6 см соответственно) вокруг гипотенузы. Найдите объем этой детали. **7 б**

II вариант

1. Дан прямой круговой цилиндр с высотой 6 см и радиусом основания 3 см.
   а) Нарисуйте развертку данного цилиндра.
   б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
   в) Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
   г) Найдите объем цилиндра.
2. Прямой круговой конус имеет высоту 12 см, а диаметр его основания равен 10 см.
   а) Найдите образующую конуса.
   б) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
   в) Найдите объем конуса.
   г) Металлический шар, радиусом 15 см переплавили в одинаковые конусы данных размеров. Сколько конусов получили?
3. Площадь поверхности шарика для пинг-понга составляет 16π см^2.
   а) Сколько шариков для пинг-понга находится в упаковке, имеющей форму цилиндра диаметром 4,2 см и высотой 12,5 см? Объясните ответ.
   б) Шарик находился на краю стола. Его подтолкнули и он покатился по прямой, к противоположной точке теннисного стола. Сделал ровно 15 оборотов и остановился. На каком расстоянии от противоположного края стола остановился шарик, если длина теннисного стола 2,74м? (При расчётах примите $\pi \approx 3{,}14$.)
4. Деталь имеет форму фигуры, полученной при вращении прямоугольного треугольника с гипотенузой длиной 10 см и острым углом величиной 60° вокруг гипотенузы. Найдите объем этой детали.

Схема оценивания теста

Отметка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
К-во баллов	44–43	42–38	37–32	31–26	25–20	19–14	13–11	10–7	6–3	2–1

Ответы и указания

Алгебра

Глава 1

§ 1. **3.** 2) а) 0,875, не является периодическим; в) 4,(851), период равен 851. **4.** а), в), д) Простые периодические десятичные числа; б), г), е) смешанные периодические десятичные числа. **7.** 10 орехов; 120 орехов. **8.** г) $x_1=5,\ x_2=-2$ – рациональные числа; е) $x_1=5-3\sqrt{3},\ x_2=5+3\sqrt{3}$ – иррациональные числа. **9.** б) $\frac{29}{9}$; в) $\frac{557}{90}$; г) $\frac{2\,817}{550}$; д) $\frac{27\,903}{1110}$. **10.** а) $1+\sqrt{7}>2\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{3}=-0,(33)$. **11.** б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) 1; г) $11-6\sqrt{2}$. **12.** в) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)\}$. **15.** 25 кг. **18.** б) $S=\varnothing$; в) $S=\{-1,\ 4\}$. **19.** а) $S=\{0;\ 0,5\}$; б) *Указание*. $|2+x|=|5x-3|\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(2+x)^2=(5x-3)^2$.

§ 2. **1.** а) $6\sqrt{2}+5\sqrt{6}-9,5$; б) $11,6-21\sqrt{2}$. **2.** в) $2,828<2\sqrt{2}<2,829$; г) $6,708<3\sqrt{5}<6,709$. **3.** в) $3-\sqrt{2}<1,7$; г) $1+\sqrt{3}<2+\sqrt{2}$. **5.** При варке овощей теряется 33% витамина C. **6.** ≈170 г масла, ≈130 г сахара, 200 г шоколада, 4 яйца, 2 ложки муки. **8.** б) Например, $4+(4+\sqrt{5})$; $10-(2-\sqrt{5})$; $4(2+0,25\sqrt{5})$; $\frac{8\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. **9.** 10 раз. **10.** 0,5 и –1. **13.** а) $8-2\sqrt{15}$; г) $38+12\sqrt{10}$. **14.** б) $11\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; г) $26+15\sqrt{3}$. **15.** б) $\approx-5,689$; г) $\approx2,466$. **16.** $16+8\sqrt{5}$. **17.** 36%. **19.** а) $2\sqrt{13}+3\sqrt{3}+120\sqrt{2}-188$. **22.** 185^2-15^2.

§ 3. **2.** а) $a\in[2,\ +\infty)$; б) $a\in(-\infty,\ 0]$; в) $a\in(-1,\ +\infty)$. **3.** а) $\sqrt{12}$; б) $-\sqrt{3a^2}$; в) $\sqrt{b(b-1)^2}$. **4.** а) $4\sqrt{3}$; б) $7\sqrt{2}$; в) $a^2\sqrt{5}$; г) $(2-a)\sqrt{7}$. **6.** а) 27; б) $\frac{1}{25}$; в) $7\frac{4}{11}$; г) $\frac{1}{16}$. **7.** а) $10a^2$; б) $\frac{1}{4}x$; в) $4b^6$; г) $1000y^{-6}$. **8.** а) 10; б) $\frac{4}{3}$. **9.** а) $\frac{\sqrt{21}}{9}$; б) $\frac{3\sqrt{10}}{25}$; в) $\sqrt{3}-1$; д) $4\sqrt{5}-9$. **10.** а) –12; б) 60; в) $9+5\sqrt{3}$; г) 11. **11.** а) $x-\sqrt{5}$; б) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; в) $-\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{7}$. **12.** а) $\frac{1}{9}$; б) 5; в) $40\frac{1}{2}$; г) 9; д) –0,9999; е) $\frac{1}{2}$. **13.** а) 210; б) 30; в) 1 500; г) 0,4. **16.** а) 500; б) 0,07; в) 4 000; г) 0,009. **17.** а) 38; б) $4(\sqrt{5}-1)$. **18.** а) И; б) И; в) Л; г) И. **19.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{49}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{2}{5}$. **20.** а) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{10}$; в) $-\sqrt{2}$.

Упражнения и задачи для повторения

1. б) $35-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}-4\sqrt{6}$. **3.** а) $\sqrt{7}<\sqrt{10}$; б) $\sqrt{63}>\sqrt{54}$; в) $\sqrt{23}<\sqrt{103}$. **4.** б) $3\sqrt{7}$; в) $3\sqrt{2}-2$; г) $\sqrt{66}-8$. **7.** б) c^{-10}; г) $\frac{1}{3x^5}$. **8.** 10, 1 и 9. **9.** 50,8 лея. **10.** г) Например, $3\sqrt{13}+4\sqrt{13}$; $8\sqrt{13}-\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}\cdot3,5$; $\frac{91}{\sqrt{13}}$. **11.** б) $11+4\sqrt{7}$; г) $200+80\sqrt{5}$. **13.** а) $3\sqrt{3}-1$; в) $14-6\sqrt{5}$. **14.** а) $S=\{-1, 4\}$; б) $S=\{0;\ 0,5\}$; в) $S=\{-2,\ 2\}$. **15.** а) $5-2\sqrt{3}<2+\sqrt{2}$; б) $6+\sqrt{7}<4\sqrt{7}$. **17.** а) $6\frac{7}{9}$; б) $15\frac{25}{99}$; в) $\frac{637}{198}$; г) $\frac{557}{4500}$. **18.** а) $-4x$; г) $-2x^2y^3\sqrt{2}$. **20.** 80 см. **21.** 50 лет и 14 лет. **22.** 0,5. **27.** *Указание*. а), б), г) Сделайте подстановку $|x|=t$; в) сделайте подстановку $|3-x|=t$. **29.** *Указание*. Исследуйте случаи $a>0,\ a<0,\ a=0$.

Глава 2

§ 1. **2.** б). **4.** а). **6.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **8.** $f(x)=3x+1$. **9.** *Указание*. Рассмотрите два случая: $p(x)=(8+2\sqrt{3})x,\ p(x)=(8-2\sqrt{3})x,\ x$ – высота трапеции. **12.** а) Да; б) нет.

§ 2. **4.** а) Функция f – строго возрастающая; в) функция f – строго убывающая. **5.** в), г) Во II, IV четвертях. **10.** а) $f(x)=7x-3$; в) $f(x)=x\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **14.** а) 1) При $m\in(2, +\infty)$ функция f строго возрастает; 2) при $m\in(-\infty, 2)$ функция f строго убывает. При $m=2$ функция f является постоянной. **16.** $A=2,\ B=10$. **18.** $f(n)=3+0\cdot n$ или $g(n)=4+(-1)^n,\ n\in\mathbb{N}$.

§ 3. **4.** а) $A:(0, +\infty)\to(0, +\infty),\ A(a)=6a^2$. **6.** а) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$. **7.** б), г) Функция f не имеет нулей. **8.** 2) *Указание*. Ось симметрии – это прямая $x=-\frac{b}{2a}$. **10.** б) $E(f)=(-\infty;\ 2]$; д) $E(f)=[-0{,}25;\ +\infty)$. **13.** а) $a>0, \Delta<0$; г) $a<0, \Delta=0$. **16.** 1,11м; 1,78 м; 2 м; 1,78 м; 1,11м. **18.** а) *Указание*. Можно задать 4 функции. **19.** Площадь меньшего треугольника $A_1(x)=\frac{ax^2}{2h}$; площадь трапеции $A_2(x)=\frac{a(h^2-x^2)}{2h}$. **20.** *Указание*. а) Решите уравнение $-2x^2-4+4=-x+2$, чтобы найти абсциссы точек пересечения. **21.** Закономерность следующая: x_1-x_2, где x_1, x_2 – решения соответствующего уравнения и $x_1>x_2$. **22.** а) $a\in\mathbb{R}^*_-$; б) $a\in\mathbb{R}^*_+$. **23.** $b=6,\ c=15$.

§ 4. **2.** а) 5; –4; $-\sqrt[3]{16}$; 1,5; –1; 0,1. **5.** а), б), г) Функция f не имеет экстремумов; в) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$.

Упражнения и задачи для повторения

1. б). **4.** а) f_3. **6.** $l=2\pi r$. **7.** а) $y=15-0{,}5x$. **15.** а) $x=0$ – ось симметрии; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=3$; г) $x=\frac{1}{12}$ – ось симметрии; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2\frac{23}{24}$. **17.** а) Можно задать 4 функции. **18.** *Указание*. Решите уравнение $f(x)=0$ и вычислите значение $f(0)$. **20.** а) *Указание*. Обозначим $2+x=t$, тогда $x=2-t$. Значит, $f(t)=5t-7$. **22.** $b=8;\ c=12$.

Глава 3

§ 1. **3.** в) X^3Y^3Z; г) XY^2Z^3. **4.** 1) а) 3; г) 0; 2) б) 6; в) 3. **7.** б) $41X^4YZ^2$; в) $3XYZ^4$. **8.** в) $4X^4Y^{12}$; г) $3{,}375Y^9Z^3$. **9.** в) $2XZ^3$; г) $22X^2Y^2Z^2$. **10.** б) $3\frac{3}{4}ZY-Z^2+XY$. **11.** б) $-2XY^2Z^4+\ +0{,}01X^3Y^5Z^2+X^3Y^3Z^3$. **14.** Закономерность следующая: соответствующая степень многочлена.

§ 2. **5.** б) $X(X-1)(X+1)^2$. **6.** б) $(0{,}5X+1)^2$; г) $(X+1)^3$. **7.** б) $(\sqrt{5}X-3\sqrt{5})(\sqrt{5}X+3\sqrt{5})$; в) $(5X-4)(25X^2+20X+16)$. **8.** в) $(2-X)(1+X)$. **10.** б) $\operatorname{grad} P(X)=3$; $\operatorname{grad} Q(X)=3$ для $m\in\mathbb{R}^*$ и любых $k, p, n\in\mathbb{R}$; $\operatorname{grad} Q(X)=2$ для $m=0,\ k\in\mathbb{R}^*$ и любых $p, n\in\mathbb{R}$; $\operatorname{grad} Q(X)=1$ для $m=0,\ k=0,\ p\in\mathbb{R}^*$ и любых $n\in\mathbb{R}$; $\operatorname{grad} Q(X)=0$ для $m=0,\ k=0,\ p=0$ и $n\in\mathbb{R}^*$. **12.** в) $(6X+1)(21X^2-3X+1)$. **13.** а) $(X-2)(3X^2+2X+4)$; б) *Указание*. Сделайте подстановку $X^3=Y$; г) $(X+1)(X^3-X^2+2)$. **14.** *Указание*. Решите уравнения II степени, соответствующие заданным многочленам. **16.** б) $Q(X)=-5X^4+X^3-2X^2+8$. **18.** $P(X)=X^2$. **19.** а) *Указание*. Сделайте подстановку $X^4=Y$; б) $(X^n-2)(X^n+2)(X^{2n}+4)$; в) $X(X^n-1)(X^n+1)$.

§ 3. **3.** г) 159; д) 0; е) 6. **5.** б) $C(X)=-5X^3-6X^2-5X-7,\ R(X)=-13$; г) $C(X)=X^7-X^6+\ +X^5-X^4+3X^3-3X^2+3X-3,\quad R(X)=4$. **7.** $P(X)=(X^3-2)(-2X+1)+(-2X+1)^2$. **8.** а) $a\in\{-5,\ 2\}$; б) $a\in\{-4, 1\}$; в) $a=-1$. **9.** $R(X)=X-4$.

§ 4. **3.** а) Л; б) И; в) Л; г) Л. **4.** а) Да; в) нет. **6.** а) –1, 1; б) 0, 2, 3; в) $\frac{1}{3}$; г) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. **8.** а) Нет; б) нет; в) да. **9.** а) 2; б) 3; в) 1. **10.** а) *Указание*. Решите систему уравнений $\begin{cases}3a+b=-2,\\ 6(a-b)=-5.\end{cases}$ **11.** $a=-5,\ b=1$.

§ 5. **2.** б) $\dfrac{X^2-2X+3}{X^2-9}$; в) $\dfrac{X^2+5X-3}{3X(X+2)}$. **5.** б) 2; в) $\dfrac{2X^2+6X+6}{X^2-9}$; д) $\dfrac{X^3-X^2-6X-16}{X^2-64}$; е) $\dfrac{X^3-3X-1}{X^2-1}$. **6.** а) $2X$; в) $-\dfrac{X+10}{2X^3}$; г) $\dfrac{X^2-4X+4}{X+2}$; е) $\dfrac{X^2}{(X+2)^2(X^2+1)(X-2)}$.
8. а) $E(X)=X+5+\dfrac{12}{X-2}$; б) $a\in\{-10,-4,-2,-1,0,1,3,4,5,6,8,14\}$.

Упражнения и задачи для повторения

2. б) $P(X)+Q(X)=-3X^3-X^2+6X+1$; $P(X)-Q(X)=3X^3-X^2-6X-3$; $P(X)\cdot Q(X)=$ $=3X^5-3X^3-2X^2-6X-2$. **3.** а) $27X^3+54X^2+36X+8$; г) $27X^3+1$. **5.** б) $\left(Z-\dfrac{1}{2}\right)^2$; г) $(3X-1)^2$. **6.** а) $-(Y+20)(9Y+20)$; б) $4X(X-9)$; г) $(Z-\sqrt{5})(Z+\sqrt{5})(Z^4+5Z^2+25)$. **7.** б) $(Y-2)(2Y^2+1)$; г) $(X+1)(X^2+\sqrt{3})$. **8.** б) $C(X)=3X^2+5X-7$; $R(X)=X-1$. **9.** б) –101. **11.** а) –2,25. **13.** *Указание.* Примените теорему Виета к уравнению, соответствующему многочлену $P(X)$.

Глава 4

§ 1. **3.** а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$; в) $\mathbb{R}$. **4.** а) $S=\{0{,}5\}$; в) $S=\{-8\}$; е) $S=\left\{-\dfrac{7}{15}\right\}$. **7.** а) $S=\mathbb{R}$; б) $S=\left\{\dfrac{7}{8}\right\}$; в) $S=\left\{-\dfrac{16}{29}\right\}$. **8.** *Указание.* а) $\dfrac{1}{x-5}=t$; б) $\dfrac{x+2}{x}=t$; в) $\dfrac{t}{t+1}=z$; г) $\dfrac{a+3}{a}=t$.
10. *Указание.* Закономерность следующая: $z_1\cdot z_2=30$, где z_1, z_2 – решения уравнений слева и справа от числа 30. **11.** *Указание.* Закономерность следующая: $x_1^{x_2}=81$, где x_1, x_2 – решения уравнений слева и справа от числа 81. **13.** а) $S=\{-2\}$; в) $S=\{6{,}5\}$; д) $S=\left\{-3\dfrac{1}{3}\right\}$.
14. а) $S=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$; б) $S=\{-4, 4\}$; в) $S=\left\{-1, -\dfrac{1}{3}\right\}$; г) $S=\left\{-\dfrac{4}{11}, \dfrac{8}{9}\right\}$. **15.** а) При $m=3$, $S=\varnothing$; при $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\left\{\dfrac{10}{m-3}\right\}$; б) при $m=0$, $S=\varnothing$; при $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $S=\left\{\dfrac{2(2-m)}{3m}\right\}$.

§ 2. **2.** а) $S=\{-4, 4\}$; б) $S=\{-5, 5\}$; в) $S=\left\{-\dfrac{2}{5}, 0\right\}$; г) $S=\left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$; д) $S=\varnothing$; е) $S=\varnothing$; ж) $S=\{0\}$; з) $S=\{0\}$. **3.** а) $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$; б) $S=\left\{\dfrac{2}{5}, 1\right\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\varnothing$. **4.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\{2, 6\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{-2\}$; д) $S=\{-1, 4\}$; е) $S=\varnothing$. **8.** а) $(x-3)(x+1)$; г) $-(x+1)(3x+2)$; д) $-(x-4)(x+1)$. **9.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\varnothing$. **10.** 1) а) $-\dfrac{3}{5}$; б) $-1\dfrac{4}{5}$; в) $3\dfrac{24}{25}$; г) $-2\dfrac{1}{5}$. **11.** 5, 20. *Указание.* Применяя соотношения Виета, задача сводится к уравнению II степени. **12.** 1; 3. **13.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\left\{-\dfrac{1}{3}, 0\right\}$. **14.** а) $S=\{-2, -1, 1, 2\}$; б) $S=\varnothing$; д) $S=\{-1, 1\}$; е) $S=\{-1, 1\}$. **15.** а) *Указание.* Закономерность следующая: $x_1^2+x_2^2=5$, где x_1, x_2 – решения данного уравнения; б) *Указание.* Закономерность следующая: $t_1^2-t_2^2=\dfrac{8}{9}$, где t_1, t_2 – решения данного уравнения. **17.** а) $S=\{0\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{-1\}$; д) $S=\varnothing$. **20.** а) –1, 1,5; в) –1, 1; г) $-\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}$. **21.** а) $(t-1)(t+1)(t^2+2)$; б) $(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$.
22. *Указание.* Сгруппируйте множители и сделайте подстановку: а) $x^2-3x=t$; б) $x^2+7x=t$.
23. а) *Указание.* Поскольку $x^2=|x|^2$, сделайте подстановку $|x|=t$.

26. а) При $m=0$, $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; при $m=-\frac{9}{4}$, $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$; при $m\in\left(-2\frac{1}{4},\ +\infty\right)\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{3-\sqrt{9+4m}}{2m},\ \frac{3+\sqrt{9+4m}}{2m}\right\}$; при $m\in\left(-\infty,\ -2\frac{1}{4}\right)$, $S=\varnothing$; б) *Указание*. Исследуйте случаи: 1) $m-2=0$; 2) $m-2\neq 0$; д) *Указание*. Исследуйте случаи: 1) $m=0$; 2) $m\neq 0$.

§ 3. **2.** а) 1; в) –1. **3.** а) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; б) $S=\{-6\}$; в) $S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$; г) $S=\{3\sqrt{2}\}$. **4.** а) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; б) $S=\left\{-2\frac{2}{3}\right\}$; в) $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; г) $S=\left\{-\frac{6}{7}\right\}$. **5.** а) $S=\{0\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{0,\ 6\}$. **6.** а) $S=\left\{8\frac{5}{8}\right\}$; в) $S=\{0,\ 12\}$. **7.** а) $S=\left\{0,\ 3\frac{1}{5}\right\}$; в) $S=\varnothing$. **9.** а) $S=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$; в) $S=\mathbb{Q}\setminus\{4\}$. **10.** в) $S=\varnothing$; г) $S=\{-5\}$. **12.** а) *Указание*. Закономерность следующая: $(x-x_1)(x-x_2)=0$, где $x_1,\ x_2$ – решения данного уравнения; б) *Указание*. Закономерность следующая: $\frac{x+x_1}{x+x_2}=0$, где $x_1,\ x_2$ – решения данного уравнения. **14.** в) $S=\{-5\sqrt{2},\ 0,\ 5\sqrt{2}\}$. *Указание*. ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-8,-6,6,8\}$. Общий знаменатель $(t^2-36)(t^2-64)$. **15.** г) ÎÄÇ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 1) При $m-3<0$, $S=\varnothing$; 2) при $m-3=0$ решите уравнение $x+\frac{1}{x}-3=0$; 3) при $m-3>0$ решите уравнения $x+\frac{1}{x}-3=m-3$, $x+\frac{1}{x}-3=-(m-3)$. **16.** а) *Указание*. Запишите функцию *f* в виде $f(x)=\frac{x^2+2x+1-x}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{(x+1)^2}$; б) *Указание*. Исследуйте функцию $f(x)=1+\frac{x}{(x-1)^2}$.

§ 4. **2.** б) $S=\{(0{,}2;\ -0{,}6)\}$; г) $S=\left\{\left(11\frac{3}{7},\ -1\frac{17}{21}\right)\right\}$. **3.** б) $S=\left\{\left(-\frac{15}{17},\ 3\frac{12}{17}\right)\right\}$; г) $S=\left\{\left(1,\ \frac{1}{2}\right)\right\}$. **6.** а) $S=\{(0,\ -1)\}$; б) $S=\left\{\left(7\frac{6}{11},\ 5\frac{3}{11}\right)\right\}$; в) $S=\{(-1,\ 2)\}$; е) $S=\{(0,\ 0)\}$. **7.** б) $S=\{(-2,\ 12)\}$; г) $S=\left\{\left(\frac{2}{5},\ 2\frac{1}{5}\right)\right\}$. **8.** *Указание*. Закономерность следующая: $x+y=2{,}82$, где (x,y) – решение данной системы. **9.** а) $S=\{(2,\ 1)\}$; б) $S=\varnothing$. **10.** *Указание*. а) Сделайте подстановку $\frac{1}{x}=u,\ \frac{1}{y}=v$; б) сделайте подстановку $\frac{1}{x-1}=u,\ \frac{1}{y-1}=v$; в) сделайте подстановку $x^2=u,\ \frac{1}{y-1}=v$. **11.** 18 км/ч; 24 км/ч. **13.** 2 км/ч. **14.** $a=5$.

§ 5. **1.** 1, 11. **2.** 25, 10; –10, –25. **4.** 43 см, 40 см. **6.** 160 км, 120 км. **7.** *Указание*. $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$. **10.** 20 часов, 30 часов. **12.** $\frac{12-2\sqrt{33}}{3}$, $\frac{12+2\sqrt{33}}{3}$. **15.** 25,5 лея, 39 леев. **16.** *Указание*. Составьте уравнение $y^2-x^2=225\Leftrightarrow(y-x)(y+x)=225$, где x – длина катета, а y – длина гипотенузы. Разложите число 225 на произведение натуральных чисел. *Ответ*: 4 треугольника. **17.** *Указание*. Пусть $x,\ y\in\mathbb{N}^*$. Решите на множестве $\mathbb{N}^*$ уравнение $(x-y)(x+y)=45$. **18.** 20 машин. **20.** 120 м.

Упражнения и задачи для повторения

1. б) $S=\left\{1\frac{4}{11}\right\}$; г) $S=\left\{-13\frac{2}{3}\right\}$. **2.** б) $S=\{0\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\{-1,\ 4\}$; е) $S=\varnothing$. **3.** г) $S=\{-12,\ 15\}$; д) $S=\{-15,\ 10\}$; е) $S=\{-8,\ 4\}$. **4.** б) $(3-X)(2X+1)$; в) $(4X+1)^2$.

5. б) $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; г) $S=\varnothing$. **6.** г) $S=\{(2,8)\}$; д) $S=\{(1,2)\}$; е) $S=\{(1{,}5\sqrt{2};-5)\}$. **7.** б) $S=\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$; г) $S=\left\{-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$. **8.** 48 двухкомнатных и 16 четырехкомнатных квартир. **10.** 31 лей. **11.** а) $S=\{-2\}$; б) $S=\left\{-\frac{8}{9}\right\}$; в) $S=\{-1,1\}$; д) $S=\{-2\}$. **13.** *Указание*. Примените теорему Виета. **14.** а) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$; б) *Указание*. Сделайте подстановку $(2x-1)^2=t$; в) *Указание*. Сделайте подстановку $(x-2)^2$; г) $(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2$. **16.** а) $S=\{(-2,-1)\}$; в) $S=\{(-16{,}5;-49{,}5)\}$. **19.** 28%. **20.** $\frac{3+15\sqrt{103}}{26},\frac{-15+3\sqrt{103}}{26}$; $\frac{3-15\sqrt{103}}{26},\frac{-15-3\sqrt{103}}{26}$. **21.** *Указание*. Закономерность следующая: $-5=xy$; $-4=-(x+y)$, где (x,y) – решение данной системы. **22.** *Указание*. Закономерность следующая: $x^2+y^2=17$, где (x,y) – решение данной системы. **23.** б) $-1, 1\frac{1}{3}$; в) $-\sqrt{5},\sqrt{5}$. **27.** а) $S=\left\{-1;-\frac{1}{2};1;1{,}5\right\}$; б) $S=\{-3,-1{,}1\}$; в) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **28.** *Указание*. а) Обозначим $x^2=u$, $y^2=v$; в) обозначим $x+y=t$, $xy=v$. **29.** Сыну 13 лет, отцу 39 лет, а маме 32 года.

Глава 5

§ 1. **3.** а) $S=(-\infty,2)$; б) $S=(-\infty,-2)$; в) $S=(-\infty,-1]$; г) $S=\left[-\frac{7}{8},+\infty\right)$. **4.** а) $S=\{0,1,2,3,4\}$; б) $S=\{0,1,2,3,4,5\}$. **5.** а) $S=\left(-\frac{1}{2},3\right)$; б) $S=\varnothing$; в) $S=[2{,}5;+\infty)$; г) $S=\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$. **8.** а) $S=(-\infty;-0{,}5)$; б) $S=(3,+\infty)$; д) $S=(3,+\infty)$. **9.** а) $S=\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$; в) $S=\varnothing$; г) $S=[2{,}5;+\infty)$. **10.** а) $x\in[2,+\infty)$; б) $x\in\left(-\infty,\frac{4}{5}\right)$; в) $x\in(3,10]$. **11.** а) $S=(1,4)$; в) $S=[-2,2]$; г) $S=(-3,4)$. **12.** 25 книг. **13.** $x\in(3,13)$; **14.** 24 места. **15.** $\frac{3}{8}$. **16.** б) $S=\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$; в) $S=\left(-4,-\frac{2}{3}\right)$. **17.** а) $a\in(-\infty,2)$; б) $a\in(-\infty,3)$. **18.** г) $a\in(-\infty,-2)$. **19.** $a\in(-2,+\infty)$. **20.** а) $a\in\{-5\}$; б) $a\in(-\infty,-5)$; в) $a\in(-5,+\infty)$.

§ 2. **3.** а) $S=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$; б) $S=(-\infty,-8)\cup(6,+\infty)$; в) $S=\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$; г) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$; е) $S=\mathbb{R}$; ж) $S=(-\infty,0)\cup(7,+\infty)$; з) $S=\left(-1,\frac{5}{4}\right)$; и) $S=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$; к) $S=(-3,3)$; л) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$; м) $S=\mathbb{R}$. **4.** а) $S=(-\infty,-8)\cup(5,+\infty)$; б) $S=[-2,0]$; в) $S=(-6,5)$; г) $S=(-\infty,-4)\cup[-1,+\infty)$; д) $S=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$. **5.** а) $S=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$; б) $S=[-5,-3]$; г) $S=(-\infty;-1]\cup[4{,}5;+\infty)$. **7.** а) $S=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$; б) $S=\mathbb{R}$; в) $S=(-5,4)$; г) $S=\varnothing$. **8.** а) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$; б) $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$. **9.** а) $S=(-\infty,-2)\cup(0,3)$; б) $S=(-\infty,-5]\cup\left[-\frac{1}{2},3\right]$; в) $S=(-\infty,1]\cup[2,3]$; г) $S=(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(4,+\infty)$; д) $S=\left(-\frac{1}{2},3\right)$; е) $S=(-\infty,-1]\cup(0,2]$;

ж) $S=[-2,1)\cup[3,+\infty)$. **10.** Да, можно вырезать. **11.** а) $S=\left(-\frac{5}{3},-\frac{9}{8}\right]$. **12.** $S=\{2,3,4,5\}$.
13. а) $S=\varnothing$; б) $S=[-5,0]$; в) $S=(1,4)$. **14.** а) $x\in[-5,1)\cup(1,6]$; б) $x\in[-10,-6]\cup[7,10]$.
15. а) $S=[1,2]\cup[3,4]$; б) $S=(-3,-1)\cup(-1,1)$. **16.** б) $m\in(-\infty,-5)$. **17.** б) $a\in\left(0,1\frac{1}{4}\right)$.

Упражнения и задачи для повторения

5. -3. **6.** а) $\left[-\frac{3}{2},2\right]$; б) $\left[-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; в) $\left(-\frac{1}{3},2\right]$; г) $(-\infty,-1]\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$. **9.** а) $S=(-4,-1)$.
10. $S=\left(\frac{3}{5},5\right)$. **11.** $S=(-\infty,-6)\cup\{-1\}\cup(2,+\infty)$. **12.** Не существует таких значений.
13. $a\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

Геометрия

Глава 1

§ 1. **5.** 36°, 144°, 144°. **6.** а) 45°, 45°; б) 75°, 105°; в) 9°, 81°; г) 70°, 70°. **9.** 30°. **10.** а) 0,625; б) $2\frac{2}{3}$. **11.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{4}{7}$; в) $\frac{7}{16}$; г) 4,2. **12.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{7}$; в) $2\frac{1}{3}$; г) $\frac{4}{11}$. **13.** а) 9,6 см; б) 5см.

14. 

15. 

17. 11 раз. **21.** *Указание*. Используйте равенство $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$.

§ 2. **1.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **3.** а) 62 см; б) $24\sqrt{5}$ см. **4.** $m(\angle A)=40°$, $m(\angle B)=20°$, $m(\angle C)=120°$. **8.** а) 37 см; б) 72 см; в) 78 см. **9.** а) $78°5'6''$; б) $154°54'53''$; в) $72°4'4''$; г) $69°25'4''$. **10.** 10 см; 12 см; 10 см; 12 см. **11.** а) $M_1(3;0)$; б) $M_1(-0{,}4;0)$. **12.** а) $(3-\sqrt{7})$ cì ; б) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ см. **13.** а) 15 см; б) 8 см. **14.** а) 90°, 130°, 140°; б) 70°, 145°, 145°; в) 100°, 110°, 150°. **15.** а) $PM=12$ см, $PN=15$ см; б) $AP=2\sqrt{6}$ см, $BP=2\sqrt{7}$ см. **16.** 55°, 125°, 125°. **17.** 70°, 70°, 110°, 110°. **18.** а), б) $m(\angle A)=m(\angle D)=75°$, $m(\angle B)=m(\angle C)=105°$. **19.** а) $m(\angle A)=m(\angle B)=90°$, $m(\angle C)=120°$, $m(\angle D)=60°$; б) $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=110°$, $m(\angle C)=m(\angle D)=90°$. **20.** Между последовательностями из пунктов б) и г).

21. а)

4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

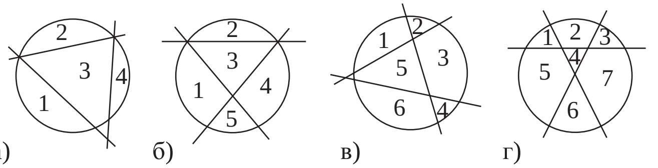
б)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

22. а) 65; б) 90. **23.** $18\sqrt{3}$ см. **24.** а) 60°, 60°, 120°, 120°; б) 6 углов по 60°. **25.** 15 см. **26.** 18 см. **27.** а) 30°, 30°, 120°; б) 12 см. **28.** 34 см. **29.** 80 см. **30.** а) *D* (–3; – 4); б) *D* (2; –3). **31.** 4. **32.** *AB* = 10 см, *AH* = 6,4 см, *BH* = 3,6 см, *CH* = 4,8 см. **33.** 5 см. **34.** $AB=9$ см, $AC=9\sqrt{3}$ см. **35.** 13 см и *h* = 12 см. **36.** 60°, 60°, 120°, 120°. **37.** *AB* = 15 см, *BC* = 25 см. **38.** 26 см. **39.** 2 см. **41.** 30 см.

Глава 2

§ 1. **4.** а) 8 см; б) 7 см; в) $2\sqrt{10}$ см; г) 2 см. **5.** а) 12 см; б) 5 см; в) 15 см. **6.** а) Секущая; б) секущая; в) касательная; г) секущая; д) не пересекающая окружность. **7.** $R = 10$ см, $AC = 10\sqrt{3}$ см, $BM = 5$ см. **8.** а) 13,7 см; б) 3,(4) см; в) 8 см. **9.** а) Секущая; б) секущая; в) не пересекающая окружность; г) касательная. **10.** а) 3 см; б) 5 см; в) $\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$. **11.** а) 10 см; б) 1,5 см. **12.** 60°. **15.** 30°. **16.** 12 см. **17.** а) $M \in \text{Int}\,\Delta ABC$; б) $M \in \text{Int}\,\Delta ABC$; в) если $r > 2$, то $M \in \text{Int}\,\Delta ABC$; если $r = 2$, то $M \in \mathscr{C}(O, 2)$; если $0 < r < 2$, то $M \in \text{Ext}\,\Delta ABC$. **18.** 20 см. **19.** 10 см. **20.** 7 см. **21.** 7,5 см. **22.** $\sqrt{15}$ см. **24.** а) 1; б) 30; в) $\sqrt{x^2 + y^2}$. **26.** $(12 + \sqrt{11})$ см. **30.** 20 см или 40 см. **31.** 8 см, 15 см. **32.** 5 см. **35.**



а) б) в) г)

36. 60 см.

§ 2. **2.** а) 45°; б) 90°; в) 125°. **3.** а) $MN = KL$; б) $MN < KL$; в) $MN = KL$. **4.** а) 44°; б) 152°; в) 17°30′; г) 80°. **5.** а) 120°; б) 72°; в) 36°; г) 30°; д) 30°; е) 15°. **11.** Квадрат. **12.** Прямоугольник. **13.** а) 50°; б) 40°; в) 65°. **14.** 1 час. **15.** 40°. **16.** 90°, 120°, 60°, 90°. **17.** 180°, 90°, 60°, 30°. **18.** 18,5 см. **19.** а) 3 хорды и 6 дуг. **20.** Величины дуг равны 10°, 30°, 60°, 70°, 80°, 110°. **21.** а) 90°; б) 35°; в) 55°; г) 20°. **22.** а) 120°; б) 150°; в) 24°; г) 210°. **23.** 6 см. **24.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **25.** 80° или 100°. **26.** $20\sqrt{3}$ см. **27.** 17 см. **28.** а) 64°; б) 117°; в) 48°; г) 57°. **33.** 18,75 см. **34.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см.

§ 3. **3.** а) 36 см; б) 54 см. **4.** а) 50°; б) 30°; в) 160°; г) 60°. **5.** а) 52°, 62°, 66°; б) 35°, 70°, 75°. **6.** а) 2,5 см, 6,5 см, 5,5 см; б) 5 см, 9 см, 8 см. **7.** а) Остроугольный; б) тупоугольный; в) прямоугольный; г) прямоугольный. **8.** AM = 18 см, BK = 7 см. **9.** а) 36°; б) 70°; в) 110°; г) 75°. **12.** а), в) – да; б), г) – нет. **13.** 5 см. **14.** а) 75°, 52°30′, 52°30′; б) 68°, 64°, 48°; в) 37°, 71°, 72°. **16.** а) 100°, 20°, 60°; б) 50°, 84°, 46°; в) 92°, 76°, 12°. **17.** 5 см, 5 см, 6 см. **19.** $\sqrt{130}$ см. **20.** $2\sqrt{7}$ см.

Упражнения и задачи для повторения

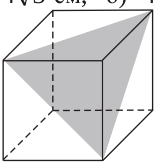
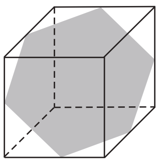
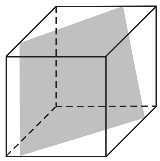
3. 5 см. **4.** 6 см. **5.** $2\sqrt{13}$ см. **7.** а) 60°; б) 17°; в) 67°. **9.** а) 6 см; б) $4\sqrt{7}$ см. **10.** а) 12 см; б) 0,5 см. **11.** а) 52° или 128°; б) 74°; в) 46°; г) 61°. **12.** а) 30°; б) 150°; в) 270°. **14.** $4\sqrt{2}$ см. **16.** $AM = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{17})$ см; $BD = 2\sqrt{34 - 3\sqrt{34}}$ см. **17.** 8,125 см. **18.** $3\sqrt{13}$ см.
19. а) $m(\angle A) = 115°$, $m(\angle B) = 40°$, $m(\angle C) = 25°$; б) $m(\angle A) = 120°$, $m(\angle B) = 37°$, $m(\angle C) = 23°$.
20. а) $m(\angle A) = 94°$, $m(\angle B) = 106°$, $m(\angle C) = 86°$, $m(\angle D) = 74°$; б) $m(\angle A) = 97°30'$, $m(\angle B) = 140°$, $m(\angle C) = 82°30'$, $m(\angle D) = 40°$.

Глава 3

7. а) 7,3 см, 2,5 см; б) $11\sqrt{2}$ см, $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{2}{3}$ см, $\frac{7}{9}$ см; г) 16 см, 2 см. **8.** 17 м. **11.** а) $\mathcal{S}=2\sqrt{110}$ см^2; в) $\mathcal{S}=10\sqrt{11}$ см^2. **12.** а) $\mathcal{S}_{ABC}=\mathcal{S}_{ABD}=49{,}5$ см^2; $\mathcal{S}_{ADC}=\mathcal{S}_{DCB}=36$ см^2; б) $\mathcal{S}_{ABC}=\mathcal{S}_{ABD}=87{,}5$ см^2; $\mathcal{S}_{ADC}=\mathcal{S}_{DCB}=50$ см^2; в) $\mathcal{S}_{ABC}=\mathcal{S}_{ABD}=53{,}25$ см^2; $\mathcal{S}_{ADC}=\mathcal{S}_{DCB}=45$ см^2; г) $\mathcal{S}_{ABC}=\mathcal{S}_{ABD}=21\sqrt{2}$ см^2; $\mathcal{S}_{ADC}=\mathcal{S}_{DCB}=\frac{42\sqrt{2}-49}{2}$ см^2. **15.** 81 см^2. **16.** 42 см. **17.** 52 см^2. **18.** 4π м^2. **19.** а) $24\sqrt{3}$ см^2; б) $32\sqrt{2}$ см^2; в) $80\sin 36°$ см^2. **20.** а) $P=48$ см, $\mathcal{S}=144$ см^2; б) $P=36\sqrt{2}$ см, $\mathcal{S}=162$ см^2; в) $P=4a$ см, $\mathcal{S}=a^2$ см^2; г) $P=2x\sqrt{2}$ см; $\mathcal{S}=\frac{x^2}{2}$ см^2. **21.** а) В 9 раз; б) в 49 раз; в) в n^2 раз. **22.** а) В 2 раза; б) в $\sqrt{10}$ раза; в) в $(4-\sqrt{11})$ раза. **23.** а) В 4 раза; б) в 25 раз; в) в $\frac{8}{3}$ раза. **24.** 99 см^2. **25.** 63 см^2. **26.** 216 см^2. **27.** 27%. **28.** $(144\sqrt{2}-96)$ см^2. **29.** а) 400 г; б) 2100 г. **30.** 48 см^2. **31.** 15 см^2. **32.** 900 см^2. **33.** 13 см. **34.** 70 см^2. **35.** $\frac{S(m+2n)}{2(m+n)}$. **36.** $P=128$ см, $\mathcal{S}=480$ см^2. **37.** $\frac{135}{2}$ см^2. **38.** Высота, проведенная к основанию треугольника *ABC*. **39.** π м. **40.** 6 см^2. **41.** 294 см^2. **42.** 170 см^2. **43.** $3r^2\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Глава 4

§ 1. **3.** б). **4.** $\mathcal{S}=54$ см^2, $\mathcal{V}=27$ см^3. **5.** $\mathcal{V}=64$ см^3, $\mathcal{S}=96$ см^2. **6.** $\mathcal{S}=24$ см^2, $\mathcal{V}=8$ см^3. **7.** 27 *л*. **9.** 150 см^2. **10.** 8 см^3. **11.** 7,2 кг. **12.** $6\sqrt{3}$ см. **13.** $3(2+\sqrt{3})$ см. **14.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{2}$ см. **15.** $\mathcal{S}=1\,536$ см^2, $\mathcal{V}=4\,096$ см^3.

16. а)  б)  в) 

§ 2. **4.** $\mathcal{S}=214$ см^2, $\mathcal{V}=210$ см^3. **5.** $\mathcal{S}_{б}=156$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=236$ см^2, $d=5\sqrt{5}$ см. **6.** 188 см^2. **7.** 960 см^3. **8.** $\mathcal{S}_{б}=96$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=126$ см^2. **9.** $\mathcal{S}_{б}=126$ см^2, $\mathcal{V}=64\sqrt{3}$ см^3. **10.** $\mathcal{S}_{б}=36\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=44\sqrt{3}$ см^2. **11.** 18 см^2. **12.** $\mathcal{S}_{t}=(96+32\sqrt{3})$ см^2, $\mathcal{V}=64\sqrt{3}$ см^3. **13.** $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ см^3. **14.** $\mathcal{S}_{п}=(105+50\sqrt{3})$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{175\sqrt{3}}{4}$ см^3. **15.** $\sqrt{7}$ см. *Указание.* Если *x*, *y*, *z* – размеры параллелепипеда, то $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ длина диагонали. **16.** $\mathcal{S}_{б}=112$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=144$ см^2, $\mathcal{V}=112$ см^3. **17.** 200 см^3. **18.** $\mathcal{S}_{б}=288$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=360$ см^2. **19.** $19\sqrt{3}$ êã $\approx 32{,}87$ êã. **20.** $\mathcal{S}_{п}=290$ см^2, $\mathcal{V}=300$ см^3. **21.** $\mathcal{S}_{б}=128$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=160$ см^2. **22.** $\mathcal{S}_{б}=90$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=(90+27\sqrt{3})$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{135\sqrt{3}}{2}$ см^3. **23.** $216\sqrt{3}$ см^2. **24.** $120\sqrt{3}$ см^3. **25.** б). **26.** 160 см^3. **27.** $19\frac{1}{21}$. **28.** 364,5 см^3. **29.** 10 см^2. **30.** $\mathcal{S}_{б}=120$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=(120+12\sqrt{3})$ см^2. **31.** 12 м^3. **32.** 1,2 см. **33.** а) $2\sqrt{38}$ см; б) 248 см^2. **34.** а) $\mathcal{S}_{б}=288\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{S}_{п}=32(9\sqrt{3}+2)$ см^2, $\mathcal{V}=384\sqrt{3}$ см^3; б) 24 см. **35.** $\mathcal{S}_{п}=(32\sqrt{3}+144)$ см^2, $\mathcal{V}=96\sqrt{3}$ см^3.

§ 3. **1.** 45 см^2. **2.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=45\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{S}_{\text{п}}=72\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{V}=36\sqrt{3}$ см^3. **3.** 9 см^2. **4.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=(36\sqrt{3}+72)$ см^2, $\mathcal{V}=24\sqrt{3}$ см^3. **5.** $63\sqrt{3}$ см^2. **6.** б). **7.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см^3. **8.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=60$ см^2, $\mathcal{V}=48$ см^3. **9.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=360$ см^2, $\mathcal{V}=400$ см^3. **10.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=100$ см^2, $\mathcal{V}=36\sqrt{3}$ см^3. **11.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=80$ см^2, $\mathcal{S}_{\text{п}}=144$ см^2, $\mathcal{V}=64$ см^3. **12.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=(24\sqrt{3}+48)$ см^2, $\mathcal{V}=16\sqrt{3}$ см^3. **13.** а) $\mathcal{P}=24$ м, $\mathcal{S}_{\text{б}}=144$ м^2, $\mathcal{S}=180$ м^2; б) $\mathcal{P}=52$ м, $\mathcal{S}_{\text{б}}=520$ м^2, $l=20$ м; в) $\mathcal{P}=36$ м, $a=9$ м, $\mathcal{S}=369$ м^2; г) $a=11$ м, $l=18$ м, $\mathcal{S}=517$ м^2; д) $a=8$ м, $\mathcal{P}=32$ м, $l=22$ м. **14.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=60\sqrt{2}$ см^2. **16.** 6 см. **17.** $(48\sqrt{3}+96)$ см^2. **18.** $\frac{432\sqrt{3}}{3}$ см^3. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=150\sqrt{7}$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{1000}{3}$ см^3. **21.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=384$ см^2, $\mathcal{V}=384$ см^3. **22.** а) $\mathcal{S}_{\text{п}}=16\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$ см^3; б) $\frac{1}{9}$. **23.** $64\sqrt{3}$ см^2.

§ 4. **6.** 24 см. **7.** 5 см. **8.** 7 см. **9.** 20 см. **10.** $\frac{\sqrt{2279}}{2}$ см. **11.** 4 см. **12.** 16 см^2. **13.** 25 см. **14.** 4 см. **15.** Нет, потому что прямые, содержащие ребра, не сходятся в одной точке. **16.** $3\sqrt{3}$ см.

Упражнения и задачи для повторения

1. а) 720°; б) 1 080°; в) 1 440°. **2.** $10\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. **3.** $\frac{128\sqrt{2}}{3}$ см^3. **4.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=232$ см^2, $\mathcal{V}=224$ см^3. **5.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=216$ см^2. **6.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=96$ см^2, $\mathcal{V}=32\sqrt{3}$ см^3. **7.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=24$ см^2, $\mathcal{V}=12\sqrt{3}$ см^3. **8.** а) $\mathcal{S}_{\text{п}}=594$ см^2, $\mathcal{V}=810$ см^3; б) 56,25 см^2. **9.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=16\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{V}=8\sqrt{3}$ см^3. **10.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) 192 см^3. **11.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ см. **12.** $h=3{,}75$ см, $\mathcal{V}=281{,}25$ см^3. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^3. **14.** 1 224 см^3. **15.** 252 см^2. **16.** $AB=4\sqrt{2}$ см, $\mathcal{V}=128\sqrt{2}$ см^3. **17.** 148 см^2. **18.** $d=3\sqrt{11}$ см, $\mathcal{S}_{\text{п}}=190$ см^2. **19.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=(18\sqrt{3}+288)$ см^2, четыре диагонали равны $2\sqrt{43}$ см и две равны $4\sqrt{13}$ см. **20.** $\mathcal{S}_{\text{б}}=940$ см^2, $\mathcal{V}=4\,200$ см^3. **21.** $\mathcal{S}_{\text{п}}=16\sqrt{3}$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$ см^3. **22.** а) 18 см; б) $\sqrt{10}$ см; в) $\frac{108\sqrt{30}}{3}$ см^3. **23.** $\frac{8\sqrt{11}}{3}$ см. **24.** $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ см^3.

Глава 5

§ 1. **3.** а), в) Да; б) нет. **5.** а) $\mathcal{S}=150\pi$ см^2, $\mathcal{V}=250\pi$ см^3; б) $\mathcal{S}=6\pi$ см^2, $\mathcal{V}=2\pi$ см^3; в) $\mathcal{S}=0{,}96\pi$ см^2, $\mathcal{V}=0{,}128\pi$ см^3. **6.** $\mathcal{S}=130\pi$ см^2, $\mathcal{V}=200\pi$ см^3. **7.** 96π см^3 или 72π см^3. **8.** а) $\mathcal{S}=\left(192\sqrt{3}+\frac{288}{\pi}\right)$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{1152\sqrt{3}}{\pi}$ см^3 или $\mathcal{S}=\left(192\sqrt{3}+\frac{96}{\pi}\right)$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{1152}{\pi}$ см^3; б) $\mathcal{S}=\left(100+\frac{50}{\pi}\right)$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{250}{\pi}$ см^3; в) $\mathcal{S}=\left(\frac{128}{\pi}+\frac{256}{\sqrt{3}}\right)$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{1\,024}{\pi\sqrt{3}}$ см^3 или $\mathcal{S}=\left(\frac{128}{3\pi}+\frac{256}{\sqrt{3}}\right)$ см^2, $\mathcal{V}=\frac{1\,024}{3\pi}$ см^3. **9.** 40π см^2. **10.** а) 60 см^2; б) 8 см^2; в) $2x^2\sqrt{3}$.

11. а) 192π см^2; б) $36\sqrt{2}\pi$ см^2. **12.** а) 375 кг; б) 60,8 кг. **13.** 66π см^2. **14.** Второй. **15.** $\mathscr{S}=125\pi$ см^2, $\mathscr{V}=187{,}5\pi$ см^3. **16.** $\mathscr{S}=130\pi$ см^2, $\mathscr{V}=200\pi$ см^3. **17.** 4см. **19.** 1350 см^3. **20.** $12\sqrt{2}$ см, $\approx 48\%$. **21.** 22 гайки, 17 % объема стержня составляют отходы. **22.** В 8 раз. **23.** В $2\sqrt{2}$ раза.

§ 2. **5.** $\mathscr{S}_п=24\pi$ см^2, $\mathscr{V}=36\pi$ см^3. **6.** $\mathscr{S}=312\pi$ см^2, $\mathscr{V}=1\,440\pi$ см^3. **7.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ см. **8.** $2\sqrt{105}$ см^2. **9.** $\mathscr{S}=\frac{9\sqrt{7}}{4}\pi(4+\sqrt{7})$ см^2, $\mathscr{V}=\frac{567\sqrt{2}}{4}\pi$ см^3. **10.** $\mathscr{S}_б=\pi\sqrt{R^4+4S^2}$, $\mathscr{V}=2\pi RS$. **11.** 25 мл. **12.** $\mathscr{S}_б=\frac{h^2}{d^2}\sqrt{d^2\pi S+S^2}$, $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\frac{Sh^3}{d^2}$. **13.** $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\pi a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}$ см^3. **14.** 24π см^2. **15.** 125π см^3. **16.** 256π см^3. **17.** 384π см^3. **18.** $1\,056\pi$ см^3.

§ 3. **6.** $R=50$ см, $r=6$ см, $h=117$ см. **7.** 10 см. **8.** 40 см. **9.** 12 см. **10.** 6,5 см. **11.** 8,5 см. **12.** 13 см. **13.** $10{,}5\pi$ дм^3. **14.** 2 см и 4 см.

§ 4. **5.** а) 8 см; б) 24 см; в) 4 см. **6.** $6\,400\pi$ км. **7.** а) $\mathscr{S}=144\pi$ см^2, $\mathscr{V}=288\pi$ см^3; б) $\mathscr{S}=6\frac{30}{49}\pi$ см^2, $\mathscr{V}=1\frac{286}{343}\pi$ см^3; в) $\mathscr{S}=108\pi$ см^2, $\mathscr{V}=108\sqrt{3}\pi$ см^3. **8.** а) 81π см^2; б) 180π см^2; в) 0. **9.** Одному мальчику. **10.** а) $3\,364\pi$ см^2; б) $5\,476\pi$ см^2. **11.** а) 43 см^2. **12.** а) $\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ см.

Упражнения и задачи для повторения

3. $\mathscr{S}_п=\left(20\sqrt{15}+\frac{150}{\pi}\right)$см^2, $\mathscr{V}=\frac{150\sqrt{5}}{\pi}$ см^3. **4.** $\mathscr{S}_п=15{,}75\pi$ см^2, $\mathscr{V}=\frac{9\sqrt{35}}{8}\pi$ см^3. **5.** 6 см. **6.** $\mathscr{S}_п=33\pi$ см^2, $\mathscr{V}=36\pi$ см^3. **7.** а) $\frac{200\sqrt{3}}{27}\pi$ см^3; б) $\frac{100}{3\sqrt{13}}\pi$ см^3. **8.** $\frac{54}{\pi}$ см^3. **9.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **10.** I случай. $\mathscr{S}_б=70\pi$ см^2, $\mathscr{V}=175\pi$ см^3. II случай. $\mathscr{S}_б=70\pi$ см^2, $\mathscr{V}=245\pi$ см^3. **11.** Масса шарика больше. **12.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3. **13.** 2 см. **14.** 7 см. **15.** Нет. **16.** $\frac{81\pi}{2}$ см^3. **17.** Сфера. **18.** $\mathscr{S}_п=108\pi$ см^2, $\mathscr{V}=\frac{216\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3. **19.** $\mathscr{S}_п=\left(169+\frac{338\sqrt{3}}{3}\right)\pi$ см^2, $\mathscr{V}=\frac{2197\sqrt{3}}{9}\pi$ см^3. **20.** 90°. **21.** 60°. **22.** $\frac{3}{4}a^3\pi$. **23.** 13 см. **24.** а) 256π см^3; б) 256π см^3.

Содержание

Алгебра

Геометрия